

Intégrales

I - Intégrale d'une fonction positive

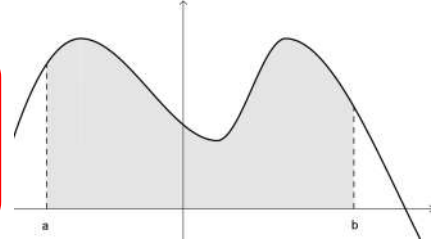
a - Définition

Définition 1

Soit f une fonction **positive** sur un intervalle $[a ; b]$

L'aire du domaine \mathcal{D} compris entre la courbe de f , l'axe des abscisses et les droites

d'équations $x = a$ et $x = b$, se note $\int_a^b f(x) dx$ (On lit "**Intégrale de a à b de f** ")



Remarques :

* a et b s'appellent les **bornes** de l'intégrale.

* dans l'écriture $\int_a^b f(x) dx$, on dit que x est une variable muette car elle n'intervient pas dans le résultat.

On peut aussi noter $\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(t) dt = \int_a^b f(u) du = \dots$

* si f est une fonction continue et **positive** sur un intervalle $[a ; b]$ (avec donc $a \leq b$), alors $\int_a^b f(x) dx \geq 0$

b - Propriétés

Propriété 2

Soit f une fonction **positive** sur un intervalle I et soient a et b deux réels quelconques de I .

Si F est une primitive de f sur I , alors on a : $\int_a^b f(x) dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$

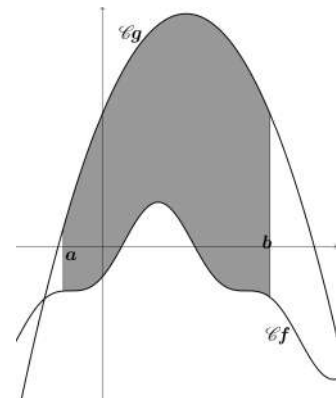
II - Aire entre deux courbes

Propriété 3

Soient f et g deux fonctions définies sur un intervalle $[a ; b]$
telles que pour tout x de $[a ; b]$, $g(x) \geq f(x)$

Alors l'aire \mathcal{A} du domaine limité par la courbe \mathcal{C}_g , la courbe \mathcal{C}_f

et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$ vaut $\mathcal{A} = \int_a^b (g(x) - f(x)) dx$



Remarque : ce résultat est vrai quel que soit le signe de la fonction f et celui de la fonction g sur l'intervalle $[a ; b]$; **il suffit seulement que $g(x) \geq f(x)$ sur $[a ; b]$**

III - Valeur moyenne d'une fonction

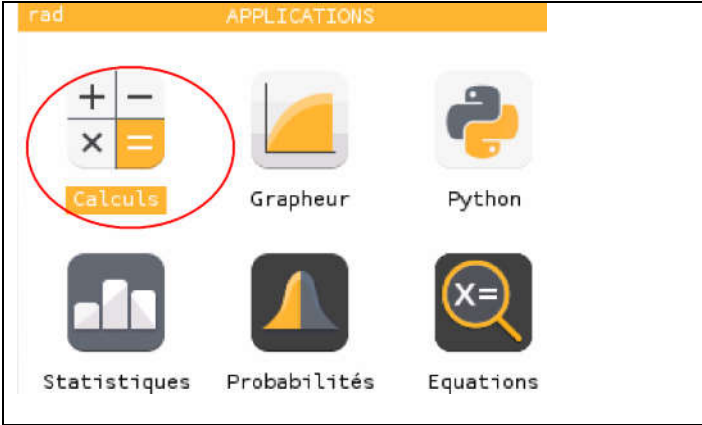

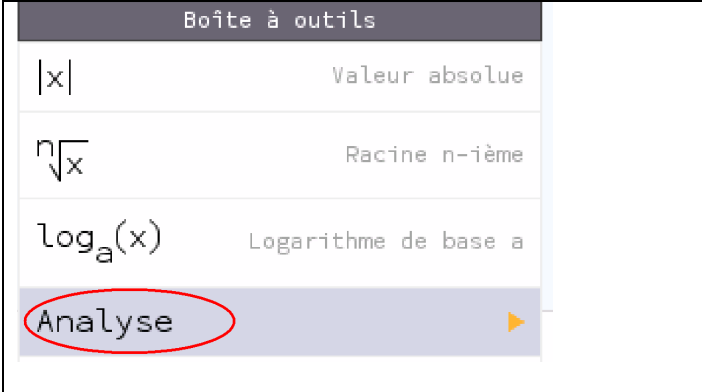
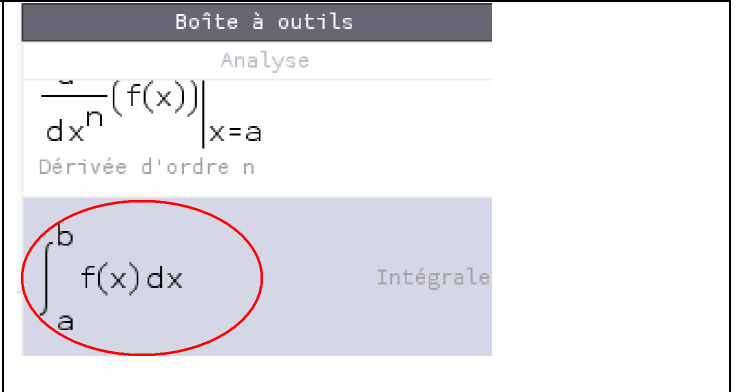


Définition 4

Soit f une fonction définie sur un intervalle $[a ; b]$.

On appelle valeur moyenne de f sur $[a ; b]$ le nombre m défini par $m = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$

IV - Utilisation de la calculatrice Numworks pour le calcul d'une valeur approchée d'une intégrale

Considérons l'intégrale $I = \int_0^2 x e^x dx$:

 <p>rad APPLICATIONS</p> <p>Calculs Grapheur Python</p> <p>Statistiques Probabilités Equations</p>	 <p>shift ALPHA cut x,n,t copy var paste clear %</p>
 <p>Boîte à outils</p> <p> x Valeur absolue</p> <p>$\sqrt[n]{x}$ Racine n-ième</p> <p>$\log_a(x)$ Logarithme de base a</p> <p>Analyse</p>	 <p>Boîte à outils</p> <p>Analyse</p> <p>$\frac{d}{dx^n}(f(x)) \Big _{x=a}$ Dérivée d'ordre n</p> <p>$\int_a^b f(x) dx$ Intégrale</p>
 <p>$\int_0^2 x e^x dx$</p>	 <p>$\int_0^2 x \cdot e^x dx$ 8.389056</p>

Remarque : La calculatrice n'affiche qu'une **valeur approchée** de l'intégrale cherchée. On en déduit $I \approx 8,39$.