

Primitives

I - Définition et propriétés

Définition 1

Soit f une fonction définie sur un intervalle I .
On appelle **primitive** de f sur I toute fonction F définie et dérivable sur I telle que $F' = f$.

Exemple : soit f la fonction définie sur $]0 ; +\infty[$ par $f(x) = x^2 + 2x + e^x + \frac{3}{x}$.

Considérons la fonction F_0 définie sur $]0 ; +\infty[$ par $F_0(x) = \frac{1}{3}x^3 + x^2 + e^x + 3 \ln x$.

F_0 est une primitive de f puisque $F_0'(x) = \frac{1}{3} \times 3x^2 + 2x + e^x + 3 \times \frac{1}{x} = x^2 + 2x + e^x + \frac{3}{x} = f(x)$

Remarque : la fonction F_1 définie sur $]0 ; +\infty[$ par $F_1(x) = \frac{1}{3}x^3 + x^2 + e^x + 3 \ln x + 2026$ est aussi une primitive de f (en effet la dérivée de 2026 est 0). Donc la fonction f n'admet pas qu'une seule primitive.

Propriétés 2

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et soit F_0 une primitive de f sur I .

Alors f possède **une infinité de primitives** sur I . Ces primitives sont les fonctions F définies par $F(x) = F_0(x) + k$, k étant un réel. (on dit alors que les primitives de f "diffèrent d'une constante").

Exemple : revenons à la fonction f définie sur $]0 ; +\infty[$ par $f(x) = x^2 - 2x + e^x + \frac{3}{x}$.

On a vu que la fonction F_0 définie sur $]0 ; +\infty[$ par $F_0(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 + e^x + 3 \ln x$ est une primitive de f .

* **L'ensemble** des primitives de f est donc formé des fonctions F définies sur $]0 ; +\infty[$ par $F(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 + e^x + 3 \ln x + k$ (k réel)

* Déterminons la primitive F_2 de f qui vérifie $F_2(1) = e$

F_2 est une primitive de f , donc $F_2(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 + e^x + 3 \ln x + k$

$F_2(1) = e \Leftrightarrow \frac{1}{3} - 1 + e + 3 \ln 1 + k = e \Leftrightarrow k = e - \frac{1}{3} + 1 - e = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$ Donc $F_2(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 + e^x + \frac{3}{x} + \frac{2}{3}$

II - Primitives des fonctions usuelles.

Le tableau ci-dessous donne une primitive des fonctions usuelles (les autres primitives diffèrent d'une constante)

Fonction f	Primitive F
$f(x) = 0$	$F(x) = k$ (k réel)
$f(x) = a$ (a réel)	$F(x) = ax$
$f(x) = x$	$F(x) = \frac{1}{2}x^2$
$f(x) = x^2$	$F(x) = \frac{1}{3}x^3$
$f(x) = x^n$ (n entier $\neq -1$)	$F(x) = \frac{1}{n+1}x^{n+1}$

Fonction f	Primitive F
$f(x) = e^x$	$F(x) = e^x$
$f(x) = \frac{1}{x^2}$	$F(x) = -\frac{1}{x}$
$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$	$F(x) = 2\sqrt{x}$
$f(x) = \frac{1}{x}$	$F(x) = \ln x$ (si $x > 0$)

Remarque : le tableau précédent s'obtient par "lecture inverse du tableau des dérivées".

III - Opérations sur les primitives.

a) Opération sur les primitives

Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I .

Soit u' la dérivée de u sur I .

Le tableau ci-contre donne une primitive des fonctions obtenues par opérations sur les fonctions u et u' :

	Fonction f	Primitive F	Conditions
1	$u'(x) e^{u(x)}$	$e^{u(x)}$	aucune
2	Pour $n \neq -1$: $u'(x) \times (u(x))^n$	$\frac{1}{n+1} (u(x))^{n+1}$	Si $n < 0$, $u(x) \neq 0$
3	$\frac{u'(x)}{u(x)}$	$\ln u(x)$	$u(x) > 0$

b) Exemples d'utilisations

Exemple 1 : déterminons une primitive de f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = (x+1) e^{x^2+2x-5}$

Utilisons la formule 1 avec $u(x) = x^2 + 2x - 5$ donc $u'(x) = 2x + 2$

$u'(x) e^{u(x)}$ a pour primitive $e^{u(x)}$

$$\begin{array}{l} \times \frac{1}{2} \quad \left(\begin{array}{l} (2x+2) e^{x^2+2x-5} \quad \text{a pour primitive} \quad e^{x^2+2x-5} \\ \frac{1}{2} (2x+2) e^{x^2+2x-5} \quad \text{a pour primitive} \quad \frac{1}{2} e^{x^2+2x-5} \\ (x+1) e^{x^2+2x-5} \quad \text{a pour primitive} \quad \frac{1}{2} e^{x^2+2x-5} \end{array} \right) \times \frac{1}{2} \end{array}$$

La fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = (x+1) e^{x^2+2x-5}$ a donc pour primitive F définie sur \mathbb{R} par $F(x) = \frac{1}{2} e^{x^2+2x-5}$

Exemple 2 : déterminons une primitive de g définie sur $]2; +\infty[$ par $g(x) = \frac{3}{4x-8}$

Utilisons la formule 3 avec $u(x) = 4x - 8$ donc $u'(x) = 4$ ($x > 2$ donc $4x - 8 > 0$)

$$\begin{array}{l} \frac{u'(x)}{u(x)} \quad \text{a pour primitive} \quad \ln u(x) \\ \frac{4}{4x-8} \quad \text{a pour primitive} \quad \ln(4x-8) \\ \times \frac{3}{4} \quad \left(\begin{array}{l} \frac{3}{4} \times \frac{4}{4x-8} \quad \text{a pour primitive} \quad \frac{3}{4} \ln(4x-8) \\ \frac{3}{4x-8} \quad \text{a pour primitive} \quad \frac{3}{4} \ln(4x-8) \end{array} \right) \times \frac{3}{4} \end{array}$$

La fonction g définie sur $]2; +\infty[$ par $g(x) = \frac{3}{4x-8}$ a donc pour primitive G définie sur $]2; +\infty[$ par $G(x) = \frac{3}{4} \ln(4x-8)$

Exemple 3 : déterminons une primitive de h définie sur \mathbb{R} par $h(x) = \frac{x}{(x^2+1)^3}$; $h(x)$ peut aussi s'écrire $h(x) = x \times (x^2+1)^{-3}$

Utilisons la formule 2 avec $u(x) = x^2 + 1$ (donc $u'(x) = 2x$) et $n = -3$

$$\begin{array}{l} u'(x) \times (u(x))^{-3} \quad \text{a pour primitive} \quad \frac{1}{-3+1} (u(x))^{-3+1} = -\frac{1}{2} (u(x))^{-2} \\ \times \frac{1}{2} \quad \left(\begin{array}{l} 2x (x^2+1)^{-3} \quad \text{a pour primitive} \quad -\frac{1}{2} (x^2+1)^{-2} \\ \frac{1}{2} \times 2x (x^2+1)^{-3} \quad \text{a pour primitive} \quad \frac{1}{2} \times (-\frac{1}{2}) (x^2+1)^{-2} \\ x \times (x^2+1)^{-3} \quad \text{a pour primitive} \quad -\frac{1}{4} (x^2+1)^{-2} \end{array} \right) \times \frac{1}{2} \\ \text{c'est-à-dire} \quad \frac{x}{(x^2+1)^3} \quad \text{a pour primitive} \quad \frac{-1}{4(x^2+1)^2} \end{array}$$

La fonction h définie sur \mathbb{R} par $h(x) = \frac{x}{(x^2+1)^3}$ a donc pour primitive H définie sur \mathbb{R} par $H(x) = \frac{-1}{4(x^2+1)^2}$