Maths Complémentaires - CH8 - Corrigé

Objectif n° 1 : Primitives d'une fonction

Exercice 1 :

1. On considère les fonctions f et F définies sur ℝ par : $f(x) = 3x^2 + 2x - 1$ et $F(x) = x^3 + x^2 - x$

a. Calculer $F'(x)$: $F'(x) = 3x^2 + 2x - 1$

b. Que remarquez-vous ? $F'(x) = f(x)$

On dit que F **est une primitive de** f sur ℝ.

2. On considère la fonction G définie sur ℝ par $G(x) = x^3 + x^2 - x + 2026$

a. Calculer $G'(x)$: $G'(x) = 3x^2 + 2x - 1$

b. Que pouvez-vous dire de G par rapport à f ? G est une autre primitive de f

3. *a.* Proposer une fonction H (différente de F et de G) qui soit aussi une primitive de f : $H(x) = x^3 + x^2 - x + 10$

b. Comment pourrait-on écrire toutes les primitives de f ? $x^3 + x^2 - x + k$, $k \in \mathbb{R}$.

Définition – Propriété 1

Soient f et F deux fonctions définies sur un intervalle I.

* On dit que **F est une primitive de f sur I** si, pour tout réel x de I, on a : $F'(x) = f(x)$

* Si F est une primitive de f sur I, alors **toutes les primitives de f sont de la forme** $F(x) + k$, $k \in \mathbb{R}$.

Exercice 2 :

1. Complète le tableau ci-dessous

$f(x)$	Primitive $F(x)$
k (constante)	kx
x	$\frac{1}{2}x^2$
x^2	$\frac{1}{3}x^3$
x^n	$\frac{1}{n+1}x^{n+1}$
e^x	e^x
$\frac{1}{x}$	$\ln x$

2. A l'aide des résultats obtenus à la question 1, déterminer une primitive de chacune des fonctions suivantes :

a. $f(x) = 4x + 7 - 3e^x + \frac{1}{x}$

b. $g(x) = 5x^3 - 4x^2 + 2e^x - \frac{7}{x}$

a) $F(x) = 4 \times \frac{1}{2}x^2 + 7x - 3e^x + \ln x$.

$\boxed{F(x) = 2x^2 + 7x - 3e^x + \ln x}$

b) $G(x) = 5 \times \frac{1}{4}x^4 - 4 \times \frac{1}{3}x^3 + 2e^x - 7 \times \ln x$.

$\boxed{G(x) = \frac{5}{4}x^4 - \frac{4}{3}x^3 + 2e^x - 7\ln x}$.

Exercice 3

Partie A

1) $F_0(x) = \underbrace{x \ln x}_{u \times v} - x$ donc $F_0'(x) = \underbrace{1 \times \ln x + \frac{1}{x} \times x}_{u'v + v'u} - 1$

$F_0'(x) = \ln x + 1 - 1 = \ln x$

$\boxed{F_0'(x) = f(x) \text{ donc } F_0 \text{ est une primitive de } f}$

2) $\boxed{\text{Les primitives de } f \text{ s'écrivent donc : } x \ln x - x + k, \; k \in \mathbb{R}}$

3) $F(x) = x \ln x - x + k$

$F(1) = 2 \iff 1 \ln 1 - 1 + k = 2 \iff -1 + k = 2 \iff k = 2 + 1 = 3$

Donc $\boxed{F(x) = x \ln x - x + 3}$

Partie B

4) $G_0(x) = \underbrace{\ln x (\ln x + 1)}_{u \times v}$ donc $G_0'(x) = \underbrace{\frac{1}{x} \times (\ln x + 1) + \frac{1}{x} \times \ln x}_{u'v + v'u}$

$G_0'(x) = \frac{\ln x + 1}{x} + \frac{\ln x}{x} = \frac{2 \ln x + 1}{x}$

$\boxed{G_0'(x) = g(x) \text{ donc } G_0 \text{ est une primitive de } g.}$

5) $\boxed{\text{Les primitives de } g \text{ s'écrivent } \ln x (\ln x + 1) + k, \; k \in \mathbb{R}}$

6) $G(x) = \ln x (\ln x + 1) + k$

$G(e) = 0 \iff \ln e (\ln e + 1) + k = 0$

$\iff 1 (1 + 1) + k = 0$

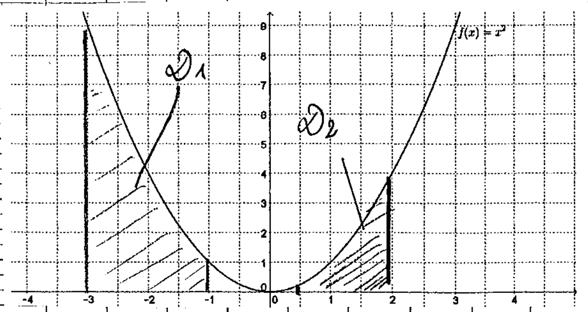
$\iff 2 + k = 0 \iff k = -2$

Donc $\boxed{G(x) = \ln x (\ln x + 1) - 2}$

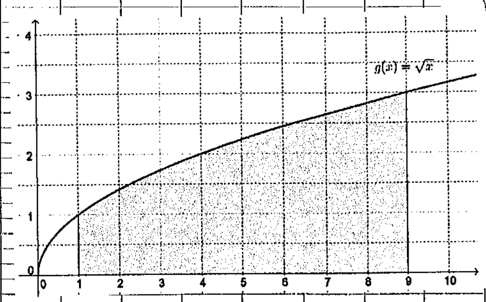
Exercice 4

1) a) $\text{Aire}(\mathcal{D}_1) = \displaystyle\int_{-3}^{-1} x^2\,dx$

b) $\text{Aire}(\mathcal{D}_2) = \displaystyle\int_{0,5}^{2} x^2\,dx$

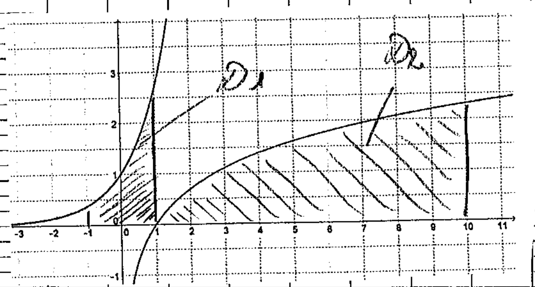


2) a) $\mathcal{D}$ est le domaine limité par $\mathcal{C}_g$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 1$ et $x = 9$



b) $\text{Aire}(\mathcal{D}) = \displaystyle\int_{1}^{9} \sqrt{x}\,dx$

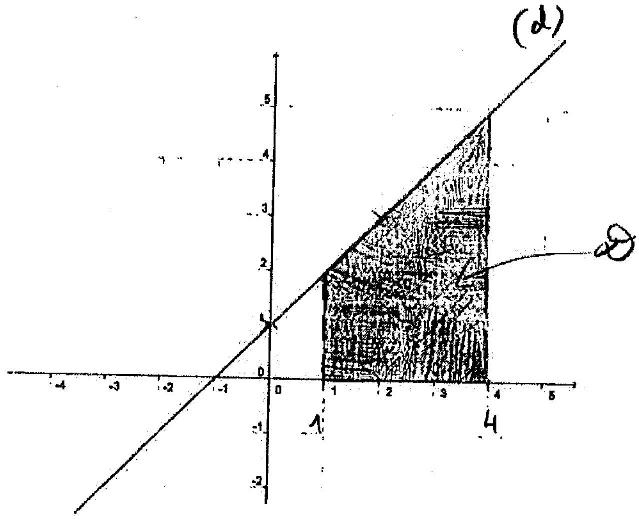
3)



Exercice 5

1)

2)



3) $\boxed{\text{Aire } (\mathcal{D}) = \int_1^4 (x+1)\,dx}$

4) Le domaine $\mathcal{D}$ est constitué d'un rectangle surmonté d'un triangle rectangle.

Aire $(\mathcal{D}) = (3\times 2) + \left(\frac{3\times 3}{2}\right) = 6 + 4,5$ $\boxed{\text{Aire } (\mathcal{D}) = 10,5 \text{ u.a.}}$

5) a) On peut prendre par exemple

$\boxed{F_1(x) = \frac{1}{2}x^2 + x}$

b) $F_1(4) - F_1(1) = \left(\frac{1}{2}\times 4^2 + 4\right) - \left(\frac{1}{2}\times 1^2 + 1\right) = 8 + 4 - \frac{1}{2} - 1 = 10,5$

$\boxed{F_1(4) - F_1(1) = 10,5.}$ On obtient la valeur de Aire $(\mathcal{D})$

6) a) Prenons $F_2(x) = \frac{1}{2}x^2 + x + 10$

b) $F_2(4) - F_2(1) = \left(\frac{1}{2}\times 4^2 + 4 + 10\right) - \left(\frac{1}{2}\times 1^2 + 1 + 10\right) = 10,5$

On obtient le même résultat qu'à la question 5

Remarque : En prenant une primitive quelconque $\left(F(x) = \frac{1}{2}x^2 + x + k\right)$ le résultat serait identique.

Exercice 6

1) $f(x) = x^3 + x^2 + 1$ donc $\boxed{F(x) = \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{3}x^3 + x}$

2) $I = \int_1^2 (x^3 + x^2 + 1)\,dx = \left[F(x)\right]_1^2 = F(2) - F(1).$

$I = \left(\frac{1}{4} \times 2^4 + \frac{1}{3} \times 2^3 + 2\right) - \left(\frac{1}{4} \times 1^4 + \frac{1}{3} \times 1^3 + 1\right)$

$I = 4 + \frac{8}{3} + 2 - \frac{1}{4} - \frac{1}{3} - 1$

$\boxed{I = \frac{85}{12} \approx 7{,}08}$

Exercice 7

1) $f_1(x) = 3x^2 + 5x - 1$ donc $F_1(x) = x^3 + \frac{5}{2}x^2 - x$

$I_1 = \int_0^1 (3x^2 + 5x - 1)\,dx = [F_1(x)]_0^1 = F_1(1) - F_1(0)$.

$I_1 = \left(1^3 + \frac{5}{2} \times 1^2 - 1\right) - \left(0^3 + \frac{5}{2} \times 0^2 - 0\right) = 1 + \frac{5}{2} - 1$

$\boxed{I_1 = \frac{5}{2}}$

2) $f_2(x) = e^x + x^5$ $F_2(x) = e^x + \frac{1}{6}x^6$

$I_2 = \int_0^1 (e^x + x^5)\,dx = [F_2(x)]_0^1 = F_2(1) - F_2(0)$

$I_2 = \left(e^1 + \frac{1}{6} \times 1^6\right) - \left(e^0 + \frac{1}{6} \times 0^6\right) = e + \frac{1}{6} - 1 - 0 = e - \frac{5}{6}$

$\boxed{I_2 = e - \frac{5}{6}}$

3) $f_3(x) = 2x + \frac{1}{x}$ $F_3(x) = x^2 + \ln x$

$I_3 = \int_1^e \left(2x + \frac{1}{x}\right)dx = [F_3(x)]_1^e = F_3(e) - F_3(1)$

$I_3 = (e^2 + \ln e) - (1^2 + \ln 1) = e^2 + 1 - 1$

$\boxed{I_3 = e^2}$

Exercice 8

1) $\lim\limits_{x \to 0} -x^2+x+4 = 4$

$\lim\limits_{x \to 0} \ln x = -\infty$

Donc par somme $\boxed{\lim\limits_{x \to 0} f(x) = -\infty}$

2) a) $f(x) = -x^2+x+4+\ln x$

Donc $f'(x) = -2x+1+\frac{1}{x} = \frac{-2x^2+x+1}{x}$

$$\boxed{f'(x) = \frac{-2x^2+x+1}{x}}$$

b) • Pour $-2x^2+x+1$

A la calculatrice : 2 racines $x_1 = -\frac{1}{2}$ $x_2 = 1$

x	0		1		4
Signe de $-2x^2+x+1$		$+$	0	$-$	
Signe de x	0	$+$		$+$	
Signe de $f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	
Variations de f	‖ $-\infty$	$\nearrow$	4	$\searrow$	$\simeq -6,6$

3) a) $\boxed{\text{D'après le tableau de variations ci-dessus, l'équation } f(x)=0 \text{ possède 2 solutions.}}$

b) A la calculatrice : $\boxed{\alpha \simeq 0,02 \text{ et } \beta \simeq 2,80}$

c)

x	0		α		β		4
Signe de $f(x)$	‖	$-$	0	$+$	0	$-$	

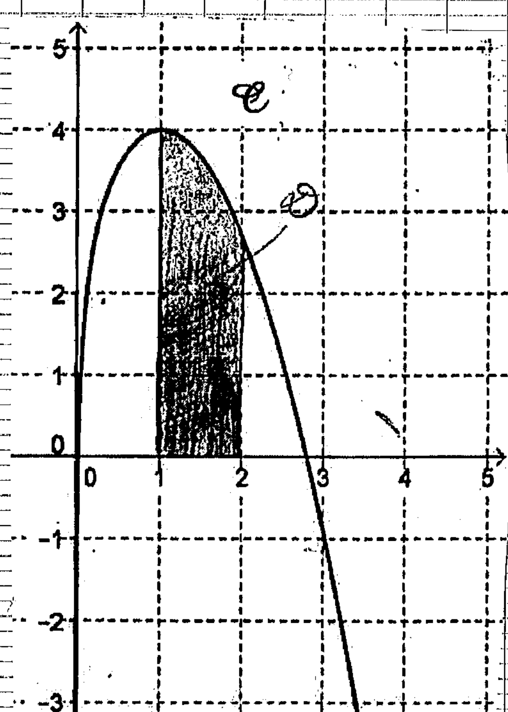
4) $F(x) = -\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + 3x + \underbrace{x \ln x}_{u \times v}$

$F'(x) = -\frac{1}{3} \times 3x^2 + \frac{1}{2} \times 2x + 3 + 1 \times \ln x + \frac{1}{x} \times x$

$F'(x) = -x^2 + x + 3 + \ln x + 1 = -x^2 + x + 4 + \ln x = f(x)$

$\boxed{F'(x) = f(x) \text{ donc } F \text{ est une primitive de } f.}$

5) a) voir ci-contre



b) Aire $\mathscr{D} = \int_1^2 f(x)\, dx$

Aire $\mathscr{D} = [F(x)]_1^2 = F(2) - F(1)$

• $F(2) = -\frac{1}{3} \times 2^3 + \frac{1}{2} \times 2^2 + 6 + 2 \ln 2$

$\approx 6,72$

• $F(1) = -\frac{1}{3} + \frac{1}{2} + 3 + 1 \times \ln 1$

$\approx 3,17$

Aire $\mathscr{D} \approx 6,72 - 3,17$

$\boxed{\text{Aire } \mathscr{D} \approx 3,55}$

Exercice 9

1) $\text{Aire}(\mathcal{D}) = \int_{-1}^{1} e^x - (x^2 - 2)\,dx$

$$\boxed{\text{Aire}(\mathcal{D}) = \int_{-1}^{1} (e^x - x^2 + 2)\,dx}$$

$\text{Aire}(\mathcal{D}) = \left[e^x - \frac{1}{3}x^3 + 2x\right]_{-1}^{1} = \left(e^1 - \frac{1}{3} + 2\right) - \left(e^{-1} + \frac{1}{3} + 2x\right)$

$\text{Aire}(\mathcal{D}) = e - \frac{1}{3} + 2 - \frac{1}{e} - \frac{1}{3} + 2$

$$\boxed{\text{Aire}(\mathcal{D}) = e - \frac{1}{e} + \frac{10}{3}}$$

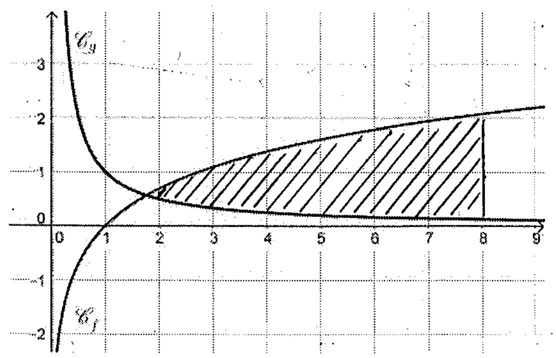
2) a) Voir ci-dessous

b) $\text{Aire}(\mathcal{D}) = \int_{2}^{8} \left(\ln x - \frac{1}{x}\right) dx = \left[x \ln x - x - \ln x\right]_{2}^{8}$

$\text{Aire}(\mathcal{D}) = (8 \ln 8 - 8 - \ln 8) - (2 \ln 2 - 2 - \ln 2)$

$\text{Aire}(\mathcal{D}) = (7 \ln 8 - 8) - (\ln 2 - 2) = 7 \ln 8 - 8 - \ln 2 + 2$

$$\boxed{\text{Aire}(\mathcal{D}) = 7 \ln 8 - \ln 2 - 6}$$



Exercice 10

1) $F(t) = -40 \times e^{-0,2t}$

donc $F'(t) = -40 \times (-0,2) e^{-0,2t}$

$F'(t) = 8 e^{-0,2t} = f(t)$.

$\boxed{F'(t) = f(t) \text{ donc } F \text{ est une primitive de } f.}$

2) $m = \dfrac{1}{6-0} \displaystyle\int_0^6 f(t)\, dt$

Donc $m = \dfrac{1}{6} \left[F(t)\right]_0^6 = \dfrac{1}{6} \left(F(6) - F(0)\right)$

$m = \dfrac{1}{6} \left(-40 \times e^{-0,2\times 6} + 40\, e^{-0,2\times 0}\right)$.

$m = \dfrac{1}{6} \left(-40\, e^{-1,2} + 40\right)$.

$m = -\dfrac{40}{6} e^{-1,2} + \dfrac{40}{6} = \dfrac{40}{6} \left(1 - e^{-1,2}\right)$.

$\boxed{m = \dfrac{20}{3} \left(1 - e^{-1,2}\right) \approx 4,66}$

Cela signifie que sur les 6 premières heures après l'injection, la concentration moyenne de substance présente dans le sang est d'environ 4,66 mg/l.

Exercice 11

1) $m_1 = \frac{1}{2-0}\int_0^2 e^x\,dx = \frac{1}{2}\left[e^x\right]_0^2$

$m_1 = \frac{1}{2}(e^2 - e^0)$ $\boxed{m_1 = \frac{e^2-1}{2}}$

2) $m_2 = \frac{1}{e-1}\int_1^e \frac{2}{x}\,dx = \frac{1}{e-1}\left[2\ln x\right]_1^e$

$m_2 = \frac{1}{e-1}(2\ln e - 2\ln 1) = \frac{1}{e-1}(2-0).$

$$\boxed{m_2 = \frac{2}{e-1}}$$

Exercice 12

1) $B(x) = (x-4)\, e^{-0,25x+5}$

$B'(x) = 1\, e^{-0,25x+5} + (-0,25\, e^{-0,25x+5})(x-4)$.

$B'(x) = e^{-0,25x+5}\left(1 - 0,25(x-4)\right) = e^{-0,25x+5}(-0,25x+2)$.

x	4		8		10
Signe de $e^{-0,25x+5}$		+		+	
Signe de $-0,25x+2$		+	0	$-$	
Signe de $B'(x)$		+	0	$-$	
Variations de B	0	↗	80,3	↘	73,1

Le bénéfice sera maximal pour $x = 8$, c'est-à-dire pour un prix de 800 €

2) $F(x) = -4x\, e^{-0,25x+5}$

Donc $F'(x) = -4\, e^{-0,25x+5} + (-0,25\, e^{-0,25x+5})(-4x)$.

$F'(x) = e^{-0,25x+5}(-4 + 0,25 \times 4x) = e^{-0,25x+5}(-4+x)$

$F'(x) = f(x)$ donc F est une primitive de f.

3) $m = \dfrac{1}{10-4}\displaystyle\int_4^{10} B(x)\,dx = \dfrac{1}{6}\left[F(x)\right]_4^{10} = \dfrac{1}{6}(F(10) - F(4))$

$F(10) \simeq -487,3$

$F(4) \simeq -873,57$

$m \simeq \dfrac{1}{6}(-487,3 + 873,57) \simeq 64,378$

Le bénéfice moyen sera d'environ 64378 €

Exercice 13 :

13/18

A l'aide du tableau des opérations sur les dérivées, on peut obtenir le "tableau des primitives " suivant :

	Fonction f	Primitive F	Conditions
1	$u'(x)\,e^{u(x)}$	$e^{u(x)}$	aucune
2	Pour $n \neq -1$: $u'(x) \times (u(x))^n$	$\frac{1}{n+1}\,(u(x))^{n+1}$	Si $n < 0$, $u(x) \neq 0$
3	$\frac{u'(x)}{u(x)}$	$\ln(u(x))$	$u(x) > 0$

1. Exemple partiellement résolu : on cherche une primitive de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{5x+1}$

On cherche la formule utilisable en essayant de trouver $f(x)$ dans la **1ère colonne du tableau .**

La seule formule possible est la formule n° 1 avec $u(x) = 5x+1$

On a alors : $u'(x)\,e^{u(x)}$ a pour primitive $e^{u(x)}$

$5\,e^{5x+1}$ a pour primitive e^{5x+1}

$\times \frac{1}{5}$ $\quad e^{5x+1}$ a pour primitive $\frac{1}{5}e^{5x+1}$ $\quad \times \frac{1}{5}$

Donc la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{5x+1}$ admet pour primitive $F(x) = \frac{1}{5}e^{5x+1}$

2. Procéder comme dans l'exemple du 1. pour déterminer une primitive de chacune des fonctions suivantes :

a) $f_1(x) = 6x\,(x^2+3)^4$	***b)*** $f_2(x) = \frac{1}{2x+1}$	***c)*** $f_3(x) = x\,e^{3x^2+4}$	***d)*** $f_4(x) = \frac{x+1}{(x^2+2x+5)^3}$	***e)*** $f_5(x) = \frac{\ln x}{x}$

a) Formule n° 2 avec $u(x) = x^2+3$ et $n = 4$.

$u'(x)\,(u(x))^4$ a pour primitive $\frac{1}{5}\,u(x)^5$

$2x\,(x^2+3)^4$ " " " $\frac{1}{5}(x^2+3)^5$

$\times 3$ $\quad 6x\,(x^2+3)^4$ " " " $\frac{3}{5}(x^2+3)^5$ $\quad \times 3$

Donc $\boxed{F_1(x) = \frac{3}{5}(x^2+3)^5}$

b) Formule n° 3 avec $u(x) = 2x+1$

$\frac{u'(x)}{u(x)}$ a pour primitive $\ln(u(x))$

$\frac{2}{2x+1}$ a pour primitive $\ln(2x+1)$

$\times \frac{1}{2}$ $\quad \frac{1}{2x+1}$ " " " $\frac{1}{2}\ln(2x+1)$ $\quad \times \frac{1}{2}$

$\boxed{F_2(x) = \frac{1}{2}\ln(2x+1)}$

c) Formule 1 avec $u(x) = 2x^2 + 4$

$u'(x)\, e^{u(x)}$ a pour primitive $e^{u(x)}$

$4x\, e^{2x^2+4}$ " " " e^{2x^2+4}

$\times \frac{3}{4}$ $3x\, e^{3x^2+4}$ " " " $\frac{3}{4}\, e^{2x^2+4}$

Donc $\boxed{F_3(x) = \frac{3}{4} e^{2x^2+4}}$

d) $\frac{x+1}{(x^2+2x+5)^3} = (x+1)(x^2+2x+5)^{-3}$

Formule 2 avec $u(x) = x^2+2x+5$ et $n = -3$

$u'(x)\, u(x)^{-3}$ a pour primitive $\frac{1}{-2}\, u(x)^{-2}$

$(2x+2)(x^2+2x+5)^{-3}$ " " " $-\frac{1}{2}\,(x^2+2x+5)^{-2}$

$\times \frac{1}{2}$ $(x+1)(x^2+2x+5)^{-3}$ " " " $-\frac{1}{4}\,(x^2+2x+5)^{-2}$

Donc $\boxed{F_4(x) = -\frac{1}{4}\,(x^2+2x-5)^{-2} = \frac{-1}{4(x^2+2x-5)^2}}$

e) $\frac{\ln x}{x} = \frac{1}{x} \times \ln x = \frac{1}{x} \times (\ln x)^1$

Formule 2 avec $u(x) = \ln x$ et $n = 1$

$u'(x)\, u(x)^1$ a pour primitive $\frac{1}{2}\, u(x)^2$

$\frac{1}{x}\,(\ln x)^1$ " " " $\frac{1}{2}\,(\ln x)^2$

Donc $\boxed{F_5(x) = \frac{1}{2}\,(\ln x)^2}$

Exercice 14

1) $x-2+\frac{5}{x+1} = \frac{(x-2)(x+1)+5}{x+1} = \frac{x^2+x-2x-2+5}{x+1}$

$= \frac{x^2-x+3}{x+1} = f(x)$

$\boxed{\text{Donc } f(x) = x-2+\frac{5}{x+1}}$

2) $f(x) = x-2+5\times\frac{1}{x+1}$

Donc $\boxed{F(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2x + 5\ln(x+1)}$

3) Cette aire vaut $\int_0^6 f(x)\,dx$.

$\int_0^6 f(x)\,dx = [F(x)]_0^6 = F(6) - F(0)$

$F(6) = \frac{1}{2}\times 36 - 12 + 5\ln 7 = 6+5\ln 7$

$F(0) = \frac{1}{2}\times 0^2 - 2\times 0 + 5\ln 1 = 0$.

$\boxed{\text{Donc l'aire vaut } 6+5\ln 7 \ (\approx 15{,}7)}$

4) $m = \frac{1}{6-0}\int_0^6 f(x)\,dx = \frac{1}{6}(6+5\ln 7)$

$\boxed{m = 1+\frac{5\ln 7}{6} \quad (m \approx 2{,}6)}$

16/18

Exercice 15

Partie A

1) a) $f(x) = -x^2+4x-5+6\ln x$

$f'(x) = -2x+4+\frac{6}{x} = \frac{-2x^2+4x+6}{x}$ $\boxed{f'(x) = \frac{-2x^2+4x+6}{x}}$

b) Pour $-2x^2+4x+6$, $\Delta = 4^2-4\times(-2)(6) = 16+48 = 64$

$x_1 = \frac{-4+8}{-4} = -1$ $x_2 = \frac{-4-8}{-4} = 3$

x	1		3		4
Signe de $-2x^2+4x+6$		+	0	−	
Signe de x		+		+	
Signe de $f'(x)$		+	0	−	
Variations de f	−2	↗	4,592	↘	3,318

2) a) • A la calculatrice $\alpha \approx 1,286$.

Donc $\boxed{1,28 < \alpha < 1,29}$

b)

x	1		α		3		4
Variations de f	−2	↗	0	↗	4,6	↘	3,3
Signe de $f(x)$		−	0	+			

3) a) $F(x) = -\frac{1}{3}x^3 + 2x^2 - 11x + \underbrace{6x\ln x}_{u \times v}$

$F'(x) = -\frac{1}{3} \times 3x^2 + 2 \times 2x - 11 + \left(6\ln x + \frac{1}{x} \times 6x\right)$

$F'(x) = -x^2 + 4x - 11 + 6\ln x + 6 =$

$F'(x) = -x^2 + 4x - 5 + 6\ln x = f(x)$.

$\boxed{F'(x) = f(x) \text{ donc } F \text{ est une primitive de } f.}$

b) $I = \int_1^4 f(x)\,dx = \left[F(x)\right]_1^4$

$I = F(4) - F(1)$.

$F(4) = -\frac{1}{3} \times 4^3 + 2 \times 4^2 - 11 \times 4 + 24\ln 4 \approx -0{,}062$

$F(1) = -\frac{1}{3} + 2 - 11 + 6\ln 1 \approx -9{,}333$

$I = F(4) - F(1)$ donc $\boxed{I \approx 9{,}271}$

Partie B

4) D'après 1b, le maximum de $f(x)$ est d'environ 4,592 obtenu pour $x = 3$

Il faut donc fabriquer 300 prothèses pour obtenir un bénéfice maximal qui sera d'environ 4592 €

$\frac{18}{18}$

5) D'après 2c, $f(x) \geq 0$ pour $x \geq \alpha$

Il faut donc fabriquer au moins 129 prothèses pour obtenir un bénéfice positif.

6) Le bénéfice moyen vaut $m = \frac{1}{4-1} \int_1^4 f(x)\,dx$

Donc $m \approx \frac{1}{3} \times 9{,}271 \approx 3{,}090$.

Le bénéfice moyen de ce prothésiste sera d'environ 3090 €