Maths Complémentaires - DS 6 - Corrigé

Exercice 1

1) $f(x) = 3\ln(x^2+1)$ $\qquad$ $\ln(x^2+1)$ est de la forme $\ln(u)$ avec $u = x^2+1$.

Donc $f'(x) = 3 \times \dfrac{2x}{x^2+1} = \dfrac{6x}{x^2+1}$ $\qquad$ Réponse (2)

2) $g(x) = \ln(2x) + \ln 2$

$g'(x) = \dfrac{2}{2x} + 0 = \dfrac{2}{2x} = \dfrac{1}{x}$ $\qquad$ Réponse (4)

3) • Si $H(x) = \frac{1}{2}x^2 e^x$ alors $H'(x) = x\,e^x + \frac{1}{2}x^2 e^x$
$= e^x\left(x + \frac{1}{2}x^2\right) \neq f(x)$.

• Si $H(x) = (x-1)e^x$ alors $H'(x) = 1\,e^x + e^x(x-1)$
$= e^x(1+x-1) = x\,e^x = f(x)$

Réponse (2)

4) • Si $F(x) = 2x^2\ln x$ alors $F'(x) = 4x\ln x + \frac{1}{x} \times 2x^2$
$= 4x\ln x + 2x \neq f(x)$.

• Si $F(x) = 2x^2 \times \frac{1}{x} = 2x$ alors $F'(x) = 2 \neq f(x)$.

• Si $F(x) = x^2(2\ln x - 1)$ alors $F'(x) = 2x(2\ln x - 1) + \frac{2}{x} \times 2x^2$
$= 4x\ln x - 2x + 2x$
$= 4x\ln x = f(x)$

Réponse (3)

5. Pour que $g(x)$ existe, il faut que $4-2x>0$

donc $-2x > -4 \iff x < \frac{-4}{-2} \iff x < 2.$

Donc $D_g =]-\infty ; 2[$ $\boxed{\text{Réponse (3)}}$

Exercice 1 : à faire sur l'énoncé (5 points) :

Pour chacune des questions suivantes, quatre réponses sont proposées; une seule est correcte.

Une réponse correcte rapporte 1 point. Une réponse fausse enlève 0,5 point. Une absence de réponse n'apporte ni n'enlève aucun point.

1. On considère la fonction f définie par $f(x) = 3 \ln (x^2 + 1)$
Parmi les quatre propositions suivantes, indiquer le numéro de celle qui est correcte: ...(2)...

(1) $f'(x) = \frac{3}{x^2+1}$	**(2)** $f'(x) = \frac{6x}{x^2+1}$	**(3)** $f'(x) = \frac{3}{2x}$	**(4)** $f'(x) = \frac{2x}{x^2+1}$

2. On donne la fonction g définie par $g(x) = \ln(2x) + \ln 2$.
Parmi les quatre propositions suivantes, indiquer le numéro de celle qui est correcte: ...(4)...

(1) $g'(x) = \frac{1}{2x} + \frac{1}{2}$	**(2)** $g'(x) = \frac{1}{2x}$	**(3)** $g'(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{2}$	**(4)** $g'(x) = \frac{1}{x}$

3. On donne la fonction h définie par $h(x) = x\,e^x$. Parmi les quatre propositions suivantes, indiquer le numéro de celle qui donne une primitive de h : ...(2)...

(1) $H(x) = \frac{1}{2}x^2 e^x$	**(2)** $H(x) = (x-1)\,e^x$	**(3)** $H(x) = (x+1)\,e^x$	**(4)** $H(x) = x\,e^x$

4. On donne la fonction f définie par $f(x) = 4x \ln x$. Parmi les quatre propositions suivantes, indiquer le numéro de celle qui donne une primitive de f: ...(3)...

(1) $F(x) = 2x^2 \ln x$	**(2)** $F(x) = 2x^2 \times \frac{1}{x}$	**(3)** $F(x) = x^2\,(2 \ln x - 1)$	**(4)** $F(x) = 4 \ln x + 4$

5. On donne la fonction g définie par $g(x) = \ln(4-2x)$. Parmi les quatre propositions suivantes, indiquer le numéro de celle qui donne l'ensemble de définition de g : ...(3)...

(1) $]0 ; +\infty[$	**(2)** $]2 ; +\infty[$	**(3)** $]-\infty ; 2[$	**(4)** $]-\infty ; 0[$

Exercice 2

1) a) $f(x) = 3x^3 - 5x^2 + 4e^x - 7.$

Donc $\boxed{F_1(x) = \frac{3}{4}x^4 - \frac{5}{3}x^3 + 4e^x - 7x}$

b) Les primitives de f s'écrivent

$\boxed{F(x) = \frac{3}{4}x^4 - \frac{5}{3}x^3 + 4e^x - 7x + k \ , \ k \in \mathbb{R}}$

c) $F(x) = \frac{3}{4}x^4 - \frac{5}{3}x^3 + 4e^x - 7x + k$

On veut que $F(0) = 1$ donc $\frac{3}{4}\times 0 - \frac{5}{3}\times 0 + 4e^0 - 7\times 0 + k = 1$

$4e^0 + k = 1$ Donc $k = 1 - 4e^0 = 1 - 4 = -3.$

Donc $\boxed{F(x) = \frac{3}{4}x^4 - \frac{5}{3}x^3 + 4e^x - 7x - 3}$

2) $g(x) = 4x^6 - 3x^4 + 5x - \frac{4}{x}$

$\boxed{G(x) = \frac{4}{7}x^7 - \frac{3}{5}x^5 + \frac{5}{2}x^2 - 4\ln x}$

Exercice 3

1) a) $f(x) = \dfrac{x - 20 + 20\ln x}{x}$ est de la forme $\dfrac{u(x)}{v(x)}$.

Donc $f'(x) = \dfrac{\left(1 + \frac{20}{x}\right) \times x - 1 \times (x - 20 + 20\ln x)}{x^2}$

$f'(x) = \dfrac{\cancel{x} + 20 - \cancel{x} + 20 - 20\ln x}{x^2} = \dfrac{40 - 20\ln x}{x^2}$

$$\boxed{f'(x) = \frac{40 - 20\ln x}{x^2}}$$

b)

x	2	$\alpha \approx 3{,}55$		e^2		25
Signe de $f'(x)$		+		0	−	
Variations de f	$-2{,}07$ ↗	2,5	↗	3,71	↘	2,78

c) A la calculatrice $\boxed{\alpha \approx 3{,}55}$

d) Voir ci-dessus.

2) a) d'après 1 b) $f(x)$ est maximal (et vaut environ 3,71) pour $x = e^2$

Donc le bénéfice maximal sera d'environ 371 euros, obtenu pour environ 739 pièces électroniques

b) D'après le tableau du 1) b), $f(x) \geq 2{,}5$ pour $x \geq \alpha$.

Donc le bénéfice sera supérieur à 250 € si l'on fabrique au minimum 355 pièces.

3) $F(x) = \ln x\,(10\ln x - 20) + x$

$$F'(x) = \frac{1}{x}(10\ln x - 20) + \frac{10}{x}(\ln x) + 1.$$

$$F'(x) = \frac{10\ln x}{x} - \frac{20}{x} + \frac{10\ln x}{x} + 1.$$

$$F'(x) = \frac{10\ln x - 20 + 10\ln x + x}{x} = \frac{x - 20 + 20\ln x}{x} = f(x)$$

$F'(x) = f(x)$ donc F est une primitive de f.

Exercice 4

On veut que $1-0{,}8^n \geq 0{,}99$

$$1-0{,}8^n \geq 0{,}99$$

$$\Leftrightarrow \quad -0{,}8^n \geq 0{,}99-1$$

$$\Leftrightarrow \quad -0{,}8^n \geq -0{,}01$$

$$\Leftrightarrow \quad 0{,}8^n \leq 0{,}01$$

$$\Leftrightarrow \quad \ln(0{,}8^n) \leq \ln(0{,}01)$$

$$\Leftrightarrow \quad n \times \ln 0{,}8 \leq \ln(0{,}01)$$

$$\Leftrightarrow \quad n \geq \frac{\ln(0{,}01)}{\ln(0{,}8)}$$

$$\frac{\ln(0{,}01)}{\ln 0{,}8} \simeq 20{,}63$$

Pour avoir plus de 99% d'obtenir au moins une boule blanche, il faut tirer au minimum 21 boules.