

Objectif n° 1 : Primitives d'une fonction

Exercice 1 :

1. On considère les fonctions f et F définies sur \mathbb{R} par : $f(x) = 3x^2 + 2x - 1$ et $F(x) = x^3 + x^2 - x$

- a. Calculer $F'(x)$:
- b. Que remarquez-vous ?

On dit que **F est une primitive de f** sur \mathbb{R} .

2. On considère la fonction G définie sur \mathbb{R} par $G(x) = x^3 + x^2 - x + 2026$

- a. Calculer $G'(x)$:
- b. Que pouvez-vous dire de G par rapport à f ?

3. a. Proposer une fonction H (différente de F et de G) qui soit aussi une primitive de f : $H(x) =$

b. Comment pourrait-on écrire toutes les primitives de f ?

Définition – Propriété 1

Soient f et F deux fonctions définies sur un intervalle I .

- * On dit que **F est une primitive de f sur I** si, pour tout réel x de I , on a :
- * Si F est une primitive de f sur I , alors **toutes les primitives de f sont de la forme**

Exercice 2 :

1. Complète le tableau ci-dessous

2. A l'aide des résultats obtenus à la question 1, déterminer une primitive de chacune des fonctions suivantes :

$f(x)$	Primitive $F(x)$
k (constante)
x
x^2
x^n
e^x
$\frac{1}{x}$

a. $f(x) = 4x + 7 - 3e^x + \frac{1}{x}$

b. $g(x) = 5x^3 - 4x^2 + 2e^x - \frac{7}{x}$

Exercice 3 :

Partie A : soit f la fonction définie sur $]0 ; +\infty[$ par $f(x) = \ln x$

1. Démontrer que la fonction F_0 définie par $F_0(x) = x \ln x - x$ est une primitive de f sur $]0 ; +\infty[$.
2. En déduire l'expression de toutes les autres primitives de f sur $]0 ; +\infty[$.
3. Déterminer la primitive F de f qui vérifie $F(1) = 2$

Partie B : soit g la fonction définie sur $]0 ; +\infty[$ par $g(x) = \frac{1+2 \ln x}{x}$

4. Démontrer que la fonction G_0 définie par $G_0(x) = \ln x (\ln x + 1)$ est une primitive de g sur $]0 ; +\infty[$.
5. En déduire l'expression de toutes les autres primitives de g sur $]0 ; +\infty[$.
6. Déterminer la primitive G de g qui vérifie $G(e) = 0$

L'exercice précédent met en évidence la propriété ci-dessous.

Propriété 2

Soit f une fonction ayant des primitives sur un intervalle I .

Si x_0 est un réel de I et si y_0 est un réel quelconque, alors il existe **une unique primitive F de f sur I telle que $F(x_0) = y_0$** .

Remarques :

- L'exercice 3 met en évidence le fait qu'il est plus facile de vérifier qu'une fonction F proposée est une primitive d'une fonction f (il suffit de dériver F et de vérifier que $F' = f$) que de déterminer une primitive.
- Dans la partie A de l'exercice 3, on a obtenu une primitive de la fonction \ln (la fonction F définie par $F(x) = x \ln x - x$). Bien que ce résultat ne fasse pas partie des primitives à connaître "par cœur" (celles du tableau de l'exercice 2), il est quand même intéressant de le retenir.

Objectif n° 2 : Aire "sous une courbe" - Intégrale d'une fonction

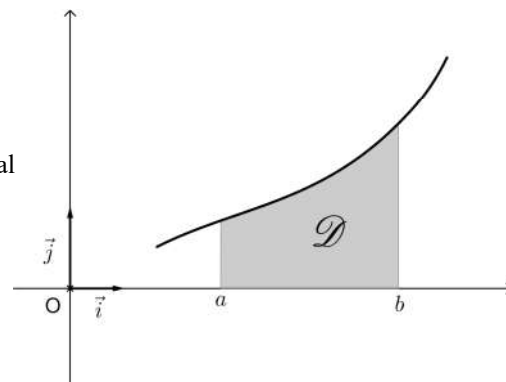
Introduction :

Le but de ce chapitre est de calculer l'aire de domaines du plan liés aux fonctions (par exemple, l'aire du domaine grisé ci-contre). On se place alors dans un repère orthogonal

($O; \vec{i}, \vec{j}$); l'unité d'aire ($u.a$) est alors l'aire d'un rectangle de côtés $\|\vec{i}\|$ et $\|\vec{j}\|$

($\|\vec{i}\|$ et $\|\vec{j}\|$ désignent les longueurs des vecteurs \vec{i} et \vec{j}).

Par exemple, si $\|\vec{i}\| = 2$ cm et si $\|\vec{j}\| = 3$ cm, alors 1 $u.a$ vaut 6 cm².



Dans toute cette partie, on considère des fonctions positives (sur un intervalle [a ; b])

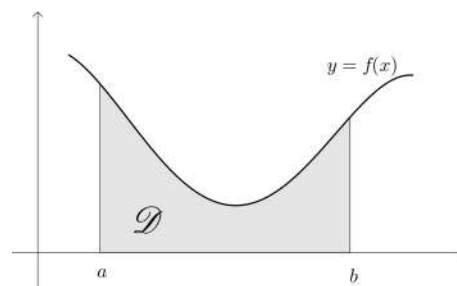
Définition et notation 3

Soit f une fonction **positive** sur un intervalle $[a ; b]$.

On considère l'aire du domaine \mathcal{D} situé entre la courbe \mathcal{C}_f , l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = a$ et $x = b$.

Cette aire se note $\int_a^b f(x) dx$ ("intégrale de a à b de $f(x) dx$ ")

et on écrira donc : $aire(\mathcal{D}) = \int_a^b f(x) dx$



Exercice 4 :

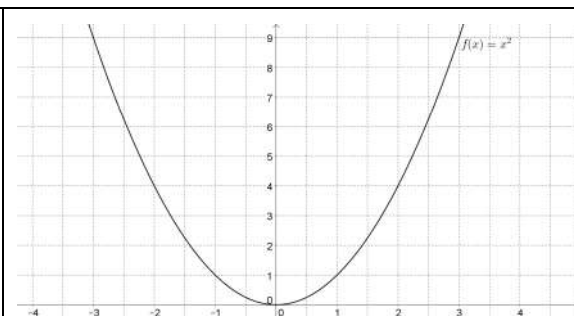
1. La courbe ci-contre représente la fonction f définie par $f(x) = x^2$

a. Hachure en vert le domaine \mathcal{D}_1 situé entre la courbe \mathcal{C}_f , l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = -3$ et $x = -1$

Ecris $aire(\mathcal{D}_1)$ à l'aide d'une intégrale.

b. Hachure en rouge le domaine \mathcal{D}_2 situé entre la courbe \mathcal{C}_f , l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 0,5$ et $x = 2$

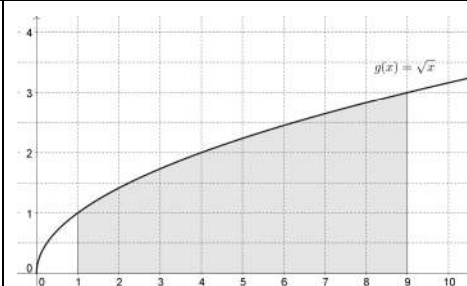
Ecris $aire(\mathcal{D}_2)$ à l'aide d'une intégrale.



2. La courbe ci-contre représente la fonction g définie par $g(x) = \sqrt{x}$

a. Définis le domaine \mathcal{D} grisé sur la figure ci-contre.

b. Ecris $aire(\mathcal{D})$ à l'aide d'une intégrale.



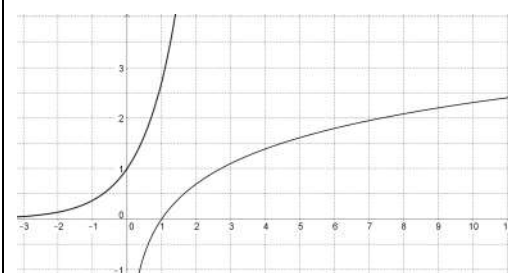
3. On a représenté les fonctions : $x \rightarrow e^x$ et $x \rightarrow \ln x$

a. Hachure en vert le domaine \mathcal{D}_1 dont l'aire peut s'écrire

$$\int_{-1}^1 e^x dx .$$

b. Hachure en rouge le domaine \mathcal{D}_2 dont l'aire peut s'écrire

$$\int_1^{10} \ln x dx .$$



Remarque : la lettre x dans l'écriture $\int_a^b f(x) dx$ peut être remplacée par n'importe quelle autre lettre (on parle d'une " **variable muette** "). On peut donc écrire indifféremment : $\int_a^b f(x) dx, \int_a^b f(t) dt, \int_a^b f(u) du, \dots$

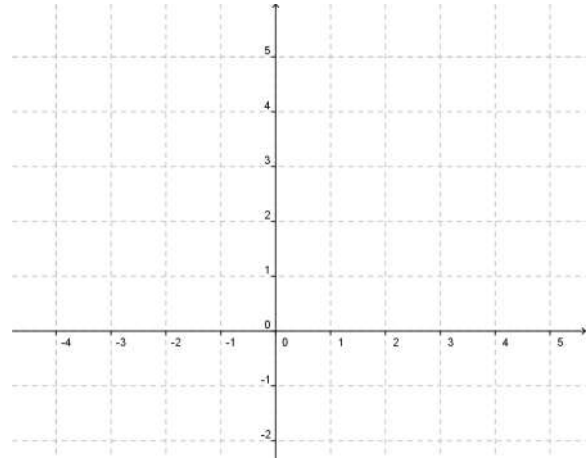
Propriété 4

Soit f une fonction **positive** sur $[a ; b]$ (avec donc $a \leq b$). On a alors $\int_a^b f(x) dx \geq 0$

Cette propriété se justifie aisément par le fait qu'une aire est toujours positive.

Exercice 5 : considérons la fonction affine f définie par $f(x) = x + 1$.

1. On nomme d la droite représentative de f dans le repère orthogonal ci-contre. Tracer d .
2. Hachurer le domaine \mathcal{D} situé entre d , l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 1$ et $x = 4$.
3. Ecrire l'aire du domaine \mathcal{D} sous la forme d'une intégrale
4. A l'aide des formules d'aire de figures élémentaires, calculer l'aire du domaine \mathcal{D} .
5. a. Déterminer une primitive F_1 de la fonction f .
b. Calculer $F_1(4) - F_1(1)$. Que remarquez-vous ?
6. a. Déterminer une autre primitive F_2 de la fonction f .
b. Calculer $F_2(4) - F_2(1)$. Que remarquez-vous ?



Dans l'exercice 5, on remarque que, pour la fonction f définie par $f(x) = x + 1$, on a : $\int_1^4 f(x) dx = F(4) - F(1)$ avec F une primitive de f .

On admet que cette propriété se généralise à toutes les fonctions positives sur un intervalle $[a ; b]$ et on a la propriété suivante :

Propriété fondamentale 5 (admise)

Soit f une fonction **positive** sur un intervalle $[a ; b]$.

Si F est une primitive quelconque de f sur $[a ; b]$, alors on a : $\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$

Exercice 6 : *Notation est présentation* :

$F(b) - F(a)$ se note aussi $[F(x)]_a^b$ et se lit " $F(x)$ pris entre a et b ". On écrira alors : $\int_a^b f(x) dx = [F(x)]_a^b$

On se propose de calculer $I = \int_1^2 (x^3 + x^2 + 1) dx$.

Méthode de rédaction et de présentation :

1. Soit la fonction f définie par $f(x) = x^3 + x^2 + 1$. Une primitive F de f sur $[1 ; 2]$ est définie par : $F(x) = \dots\dots\dots$
2. $I = \int_1^2 (x^3 + x^2 + 1) dx = [F(x)]_1^2 = F(\dots) - F(\dots) = \dots\dots\dots$

Exercice 7 : En utilisant la même présentation que dans l'exercice précédent, calculer les intégrales suivantes :

$I_1 = \int_0^1 (3x^2 + 5x - 1) dx$	$I_2 = \int_0^1 (e^x + x^5) dx$	$I_3 = \int_1^e (2x + \frac{1}{x}) dx$
-------------------------------------	---------------------------------	--

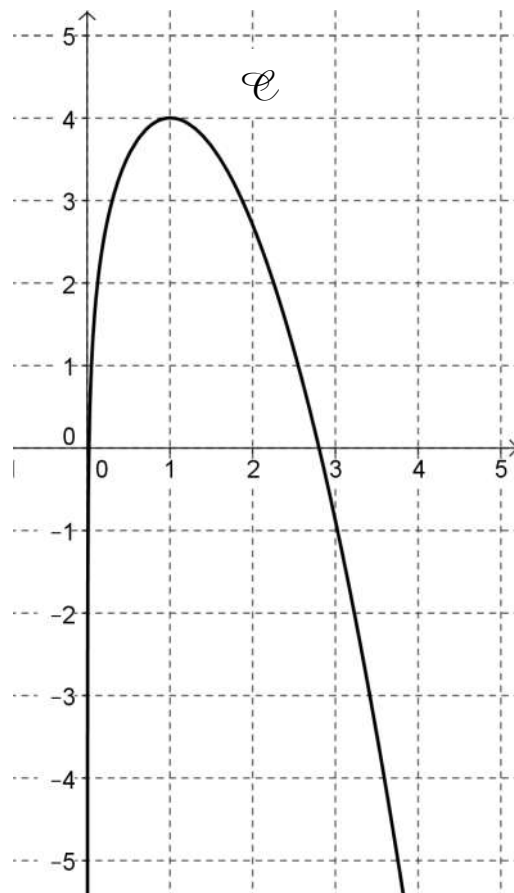
Exercice 8 :

Soit f la fonction définie sur $]0 ; 4]$ par $f(x) = -x^2 + x + 4 + \ln x$

On note \mathcal{C} sa courbe représentative dans un repère orthogonal, donnée ci-contre.

1. Déterminer $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$.
2. On note f' la fonction dérivée de f sur $]0 ; 4]$.
 - a. Calculer $f'(x)$ et montrer que $f'(x) = \frac{-2x^2 + x + 1}{x}$
 - b. Etudier le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $]0 ; 4]$.
3. a. D'après le tableau de variations précédent, combien l'équation $f(x) = 0$ possède-t-elle de solutions ?
 b. A l'aide de la calculatrice, déterminer une valeur approchée au centième de chacune de ses solutions. (on les notera α et β ; α étant la plus petite des deux).
 c. En déduire le signe de $f(x)$ sur l'intervalle $]0 ; 4]$.
4. On définit la fonction F dérivable sur l'intervalle $]0 ; 4]$ par :

$$F(x) = -\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + 3x + x \ln x.$$
 Montrer que F est une primitive de la fonction f sur l'intervalle $]0 ; 4]$.
5. On considère le domaine \mathcal{D} délimité par la courbe \mathcal{C} , l'axe des abscisses, et les droites d'équations $x = 1$ et $x = 2$.
 - a. Hachurer le domaine \mathcal{D} sur la figure ci-contre.
 - b. Déterminer par le calcul la valeur approchée au centième de l'aire de \mathcal{D} .



Remarque : on peut vérifier une valeur approchée du résultat à l'aide la calculatrice; pour cela, on tape :

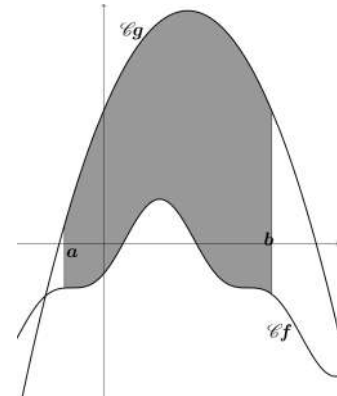
Objectif n° 3 : Aire entre deux courbes

Propriété 6

Soient f et g deux fonctions définies sur un intervalle $[a ; b]$ telles que pour tout x de $[a ; b]$, $g(x) \geq f(x)$

Alors l'aire \mathcal{A} du domaine limité par la courbe \mathcal{C}_g , la courbe \mathcal{C}_f

et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$ vaut $\mathcal{A} = \int_a^b (g(x) - f(x)) dx$

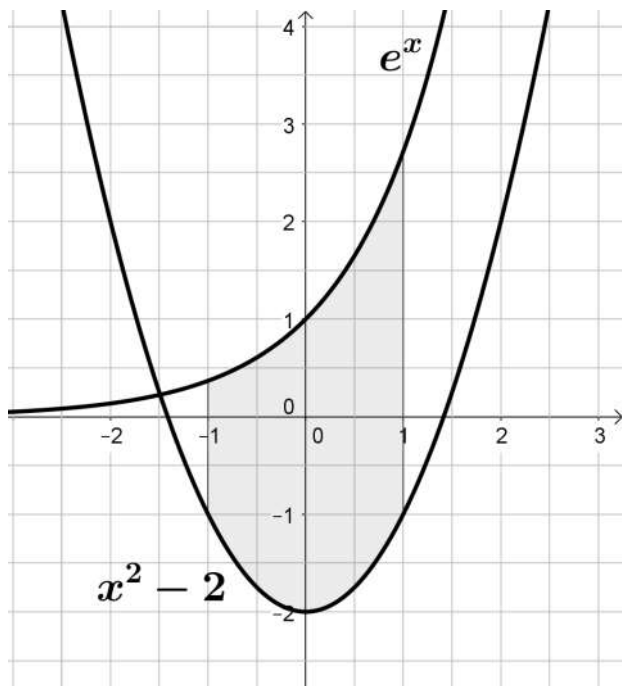


Remarque : ce résultat est vrai quel que soit le signe de la fonction f et celui de la fonction g sur l'intervalle $[a ; b]$; il suffit seulement que $g(x) \geq f(x)$ sur $[a ; b]$

Exercice 9 :

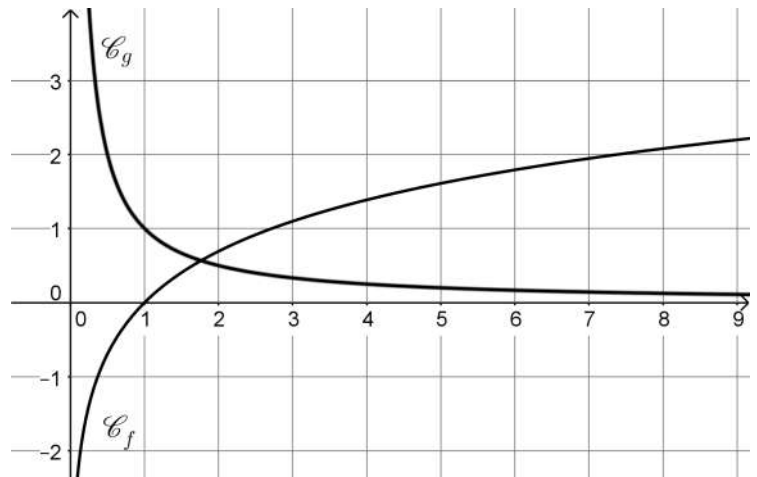
1. On a tracé ci-dessous les représentations graphiques des fonctions f et g définies par $f(x) = e^x$ et $g(x) = x^2 - 2$.

Ecrire l'aire du domaine grisé ci-dessous à l'aide d'une intégrale puis calculer sa valeur exacte.



2. Les courbes ci-contre représentent les fonctions f et g définies sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$ par $f(x) = \ln(x)$ et $g(x) = \frac{1}{x}$.

- a. Hachurer le domaine compris entre les courbes de ces deux fonctions et les droites d'équations $x = 2$ et $x = 8$
 b. Calculer l'aire de ce domaine (aide : une primitive de la fonction \ln a été obtenue à l'exercice 3 partie A)



Objectif n° 4 : Valeur moyenne d'une fonction.

Exercice 10 :

Une substance médicamenteuse est injectée par voie intraveineuse à un patient. Dans les heures qui suivent l'injection, la substance est éliminée par les reins. La concentration de substance (en mg/l) présente dans le sang à l'instant t (en h) est modélisée par la fonction f définie sur $[0 ; + \infty [$ par $f(t) = 8 e^{-0,2t}$

1. Démontrer que la fonction F définie par $F(t) = -40 e^{-0,2t}$ est une primitive de la fonction f sur $[0 ; + \infty [$.

2. On aimerait connaître la concentration moyenne dans l'organisme durant les 6 premières heures après l'injection.

Jusqu'à présent, lorsque l'on devait calculer une moyenne, il s'agissait d'une moyenne d'un nombre fini de valeurs et le calcul était aisé (moyenne = $\frac{\text{somme des valeurs}}{\text{nombre de valeurs}}$).

*Ici, il s'agit de calculer **la moyenne d'une fonction**, donc d'une infinité de valeurs; la définition habituelle n'est donc pas utilisable.*

Pour calculer la valeur moyenne de la fonction f entre 0 et 6, on utilise la définition suivante, qui permet de calculer la valeur moyenne d'une fonction sur un intervalle $[a ; b]$

Définition 7

Soit f une fonction définie sur un intervalle $[a ; b]$.

On appelle **valeur moyenne de f sur $[a ; b]$** le nombre $m = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$

En déduire la valeur moyenne de f sur l'intervalle $[0 ; 6]$.

Exercice 11 :

Calculer la valeur moyenne des fonctions suivantes sur l'intervalle I donné :

1) $f(x) = e^x$ $I = [0 ; 2]$	2) $f(x) = \frac{2}{x}$ $I = [1 ; e]$
---------------------------------	---

Exercice 12 :

Une entreprise commercialise des tablettes tactiles. Le bénéfice $B(x)$ de l'entreprise, en milliers d'euros, en fonction du prix x des tablettes tactiles, en centaines d'euros, est modélisé sur l'intervalle $[4 ; 10]$ par $B(x) = (x - 4) e^{-0,25x + 5}$

1. Pour quel prix ce bénéfice est-il maximum ? Justifier.

2. Démontrer que la fonction F définie par $F(x) = -4x e^{-0,25x + 5}$ est une primitive de la fonction B sur l'intervalle $[4 ; 10]$.

3. Calculer le bénéfice moyen, en euro, réalisé par l'entreprise sur l'intervalle $[4 ; 10]$ (on arrondira à l'unité)

Objectif n° 4 : Calculs de primitives à l'aide d'opérations sur les fonctions.

Exercice 13 :

A l'aide du tableau des opérations sur les dérivées, on peut obtenir le "tableau des primitives " suivant :

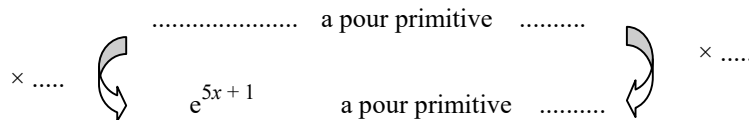
	Fonction f	Primitive F	Conditions
1	$u'(x) e^{u(x)}$	$e^{u(x)}$	aucune
2	Pour $n \neq -1$: $u'(x) \times (u(x))^n$	$\frac{1}{n+1} (u(x))^{n+1}$	Si $n < 0$, $u(x) \neq 0$
3	$\frac{u'(x)}{u(x)}$	$\ln(u(x))$	$u(x) > 0$

1. Exemple partiellement résolu : on cherche une primitive de la fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = e^{5x+1}$

On cherche la formule utilisable en essayant de trouver $f(x)$ dans la 1^{ère} colonne du tableau .

La seule formule possible est la formule n° avec $u(x) = \dots\dots$

On a alors : $u'(x) e^{u(x)}$ a pour primitive $e^{u(x)}$



Donc la fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = e^{5x+1}$ admet pour primitive $F(x) = \dots\dots\dots$

2. Procéder comme dans l'exemple du 1. pour déterminer une primitive de chacune des fonctions suivantes :

a) $f_1(x) = 6x(x^2 + 3)^4$	b) $f_2(x) = \frac{1}{2x+1}$	c) $f_3(x) = 3x e^{2x^2+4}$	d) $f_4(x) = \frac{x+1}{(x^2+2x+5)^3}$	e) $f_5(x) = \frac{\ln x}{x}$
---------------------------------------	--	---------------------------------------	--	---

Exercice 14 : soit f la fonction définie sur $] -1 ; +\infty [$ par $f(x) = \frac{x^2 - x + 3}{x + 1}$.

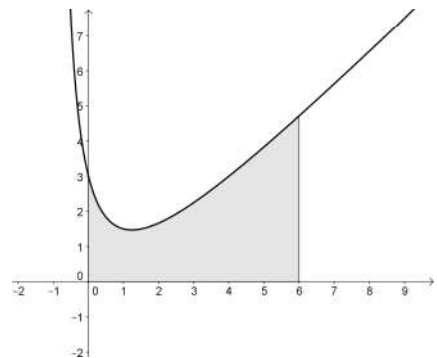
Sa courbe représentative est donnée ci-contre.

1. Montrer que pour tout x de $] -1 ; +\infty [$, $f(x)$ est égal à : $x - 2 + \frac{5}{x+1}$

2. Déterminer une primitive de f sur $] -1 ; +\infty [$

3. Déterminer l'aire du domaine grisé ci-dessous.

4. Déterminer la valeur moyenne de f sur $[0 ; 6]$



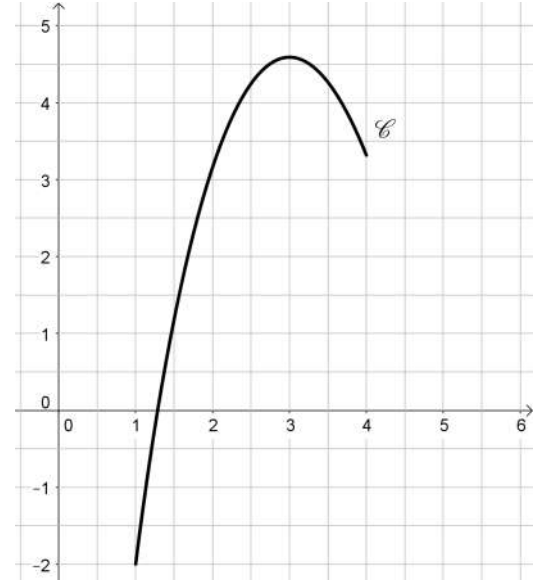
Exercice 15 :

Partie A

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[1 ; 4]$ par

$$f(x) = -x^2 + 4x - 5 + 6 \ln x.$$

Sa courbe représentative \mathcal{C} est donnée ci-contre.



1. a. Justifier que pour tout x de l'intervalle $[1 ; 4]$, $f'(x) = \frac{-2x^2 + 4x + 6}{x}$

b. Dresser le tableau de variations de f sur l'intervalle $[1 ; 4]$ (les valeurs seront arrondis au millième si nécessaire).

2. a. D'après le tableau de variations précédent, l'équation $f(x) = 0$ possède une unique solution α dans l'intervalle $[1 ; 4]$. Donner un encadrement de α d'amplitude 10^{-2} .

b. En déduire le signe de f sur l'intervalle $[1 ; 4]$

3. a. Justifier que la fonction F définie sur l'intervalle $[1 ; 4]$ par $F(x) = -\frac{1}{3}x^3 + 2x^2 - 11x + 6x \ln x$ est une primitive de la fonction f sur l'intervalle $[1 ; 4]$.

b. En déduire la valeur arrondie au millième de l'intégrale $I = \int_1^4 f(x)dx$

Partie B

Chaque mois, un prothésiste dentaire produit entre 100 et 400 prothèses. On admet que lorsque x centaines de prothèses sont fabriquées (avec $1 \leq x \leq 4$), le bénéfice, en milliers d'euros, est donnée par $f(x)$, où f est la fonction définie dans la partie A.

En utilisant certains résultats de la partie A (vous indiquerez lesquels), répondez aux question suivantes :

4. Combien de prothèses faut-il fabriquer pour obtenir un bénéfice maximal ? Donner ce bénéfice maximal à l'euro près.
5. Combien de prothèses faut-il fabriquer pour obtenir un bénéfice positif ?
6. Quel sera le bénéfice moyen mensuel de ce prothésiste ?