Maths Complémentaires 1/5

DS 5 _ Corrigé

Exercice 1 : à faire sur l'énoncé (5 points) :

Pour chacune des questions suivantes, quatre réponses sont proposées; une seule est correcte. Indiquer la proposition correcte (aucune justification n'est demandée).

- ➔ 1 réponse correcte rapporte 1 point
- ➔ 1 réponse fausse enlève 0,5 point.
- ➔ L'absence de réponse n'apporte ni n'enlève aucun point.

Pour les deux premières questions, X désigne une variable aléatoire qui suit la loi géométrique de paramètre $p = 0{,}35$

1. Parmi les quatre propositions suivantes, indiquer le numéro de celle qui est correcte: **(3)**

(1) $p(X=4) = 0{,}65^4 \times 0{,}35$	**(2)** $p(X=4) = 0{,}35^3 \times 0{,}65$	**(3)** $p(X=4) = 0{,}65^3 \times 0{,}35$	**(4)** $p(X=4) = 0{,}35^4 \times 0{,}65$

2. Parmi les quatre propositions suivantes, indiquer le numéro de celle qui est correcte: **(2)**

(1) $p(X>3) = 0{,}35^3$	**(2)** $p(X>3) = 0{,}65^3$	**(3)** $p(X>3) = 1 - 0{,}35^3$	**(4)** $p(X>3) = 1 - 0{,}65^3$

3. On donne la fonction f définie par $f(x) = x \ln x - 2x$. Indiquer le numéro de la proposition correcte : **(4)**

(1) $f'(x) = \frac{1}{x} - 2$	**(2)** $f'(x) = (1+x)\ln x - 2$	**(3)** $f'(x) = \ln x - 2$	**(4)** $f'(x) = \ln x - 1$

4. On donne la fonction g définie par $g(x) = \frac{\ln x}{x}$. Indiquer le numéro de la proposition correcte : **(3)**

(1) $g'(x) = \frac{\frac{1}{x}}{1}$	**(2)** $g'(x) = \frac{1+\ln x}{x^2}$	**(3)** $g'(x) = \frac{1-\ln x}{x^2}$	**(4)** $g'(x) = \frac{\ln x - 1}{x^2}$

5. On donne l'équation : $(1 + 2e^x)(1 + 2\ln x)(1 - 2\ln x) = 0$.. Indiquer le numéro de la proposition correcte : **(2)**

(1) Cette équation possède une solution	**(2)** Cette équation possède 2 solutions	**(3)** Cette équation possède 3 solutions.	**(4)** Cette équation n'a pas de solutions

Exercice 2

Voici une liste de nombres :

$A = e^{-2}$	$B = \ln(-2)$	$C = \ln(0)$	$D = \ln(0{,}75)$	$E = -\ln(3-e)$	$F = \ln(3-\pi)$

1. Pour chacun des nombres donnés, indiquer s'il existe ou pas et justifier votre réponse (toute réponse non justifiée, même correcte ne sera pas comptabilisée)

A existe ☒ A n'existe pas ❒ car	B existe ❒ B n'existe pas ☒ car .... $-2 < 0$	C existe ❒ C n'existe pas ☒ car .... $\ln x$ n'existe que si $x > 0$	D existe ☒ D n'existe pas ❒ car	E existe ☒ E n'existe pas ❒ car	F existe ❒ F n'existe pas ☒ car .... $3 - \pi < 0$

2. **Pour les nombres qui existent** : préciser s'ils sont positifs ou négatifs en justifiant la réponse (toutes les cases ne sont peut-être pas à remplir)

$A = e^{-2}$ Une exponentielle est toujours positive donc $A > 0$	$D = \ln 0{,}75$ $0 < 0{,}75 < 1.$ donc $\ln 0{,}75 < 0$ Donc $D < 0$	$E = -\ln(3-e)$ $0 < 3-e < 1$ donc $\ln(3-e) < 0$ et $-\ln(3-e) > 0$ $E > 0.$	

Exercice 3

1) X suit la loi géométrique de paramètre $p = 0{,}125$

2) On cherche $p(X=4)$

$p(X=4) = (1-0{,}125)^3 \times 0{,}125$

$\boxed{p(X=4) = 0{,}875^3 \times 0{,}125 \approx 0{,}08}$

3) On cherche $p(X \leq 4)$

$p(X \leq 4) = 1 - (1-p)^4$

$\boxed{p(X \leq 4) = 1 - 0{,}875^4 \approx 0{,}41}$

4) a) $\boxed{p(X > 5) = (1-0{,}125)^5 = 0{,}875^5 \approx 0{,}51}$

5) Il y a environ 50% de chance qu'il faille au moins 6 appels pour avoir le 1er appel positif

5) On cherche $p_{X>4}(X>8)$

$$p_{X>4}(X>8) = \frac{p(X>4 \cap X>8)}{p(X>4)} = \frac{p(X>8)}{p(X>4)}$$

$$p_{X>4}(X>8) = \frac{(1-0{,}125)^8}{(1-0{,}125)^4} = \frac{0{,}875^8}{0{,}875^4} = 0{,}875^4 \approx 0{,}59$$

Donc $\boxed{p_{X>4}(X>8) \approx 0{,}59}$

6) $E(X) = \frac{1}{p} = \frac{1}{0{,}125} = 8$

En moyenne, il faut passer 8 appels

Exercice 4

1) $E(X) = n \times p = 96$

$E(X) = 96$. Donc en moyenne, dans un échantillon de 120 élèves, 96 sont satisfaits

2) A la calculatrice

$p(87 \leq X \leq 105) \approx 0,97 > 0,95$

(Donc $m = 9$)

3) $89 \in [87;105]$, donc il n'y a pas de raisons de douter de l'affirmation figurant sur la page Internet du lycée.

Exercice 5

La variable aléatoire X donnant le nombre de composants à tester avant de tomber sur un composant défectueux suit la loi géométrique de paramètre $p = 0,02$

$$E(X) = \frac{1}{p} = \frac{1}{0,02} = 50.$$

$50 \times 1,30 = 65$ €

Le coût moyen pour détecter un composant défectueux est de 65 €