Corrigé

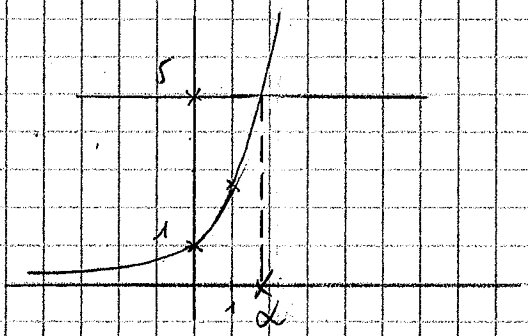
Exercice 1

1) Pour tout x, $e^x > 0$ donc

$\boxed{\text{l'équation } e^x = -3 \text{ n'a pas de solutions}}$

2) $\boxed{e^x = 1 \text{ pour } x = 0}$

3)



Graphiquement, l'équation $e^x = 5$ possède une seule solution (α)

. A la calculatrice :

$e^1 \approx 2,7 < 5$
$e^2 \approx 7,4 > 5$ } donc $1 < \alpha < 2$

$e^{1,6} \approx 4,95 < 5$
$e^{1,7} \approx 5,47 > 5$ } donc $1,6 < \alpha < 1,7$

$e^{1,60} \approx 4,95 < 5$
$e^{1,61} \approx 5,003 > 5$ } donc $1,6 < \alpha < 1,61$

$e^{1,609} \approx 4,998 < 5$
$e^{1,610} \approx 5,003 > 5$ } donc $\boxed{1,609 < \alpha < 1,610}$

La calculatrice affiche $\ln 5 \approx 1,6094379124$

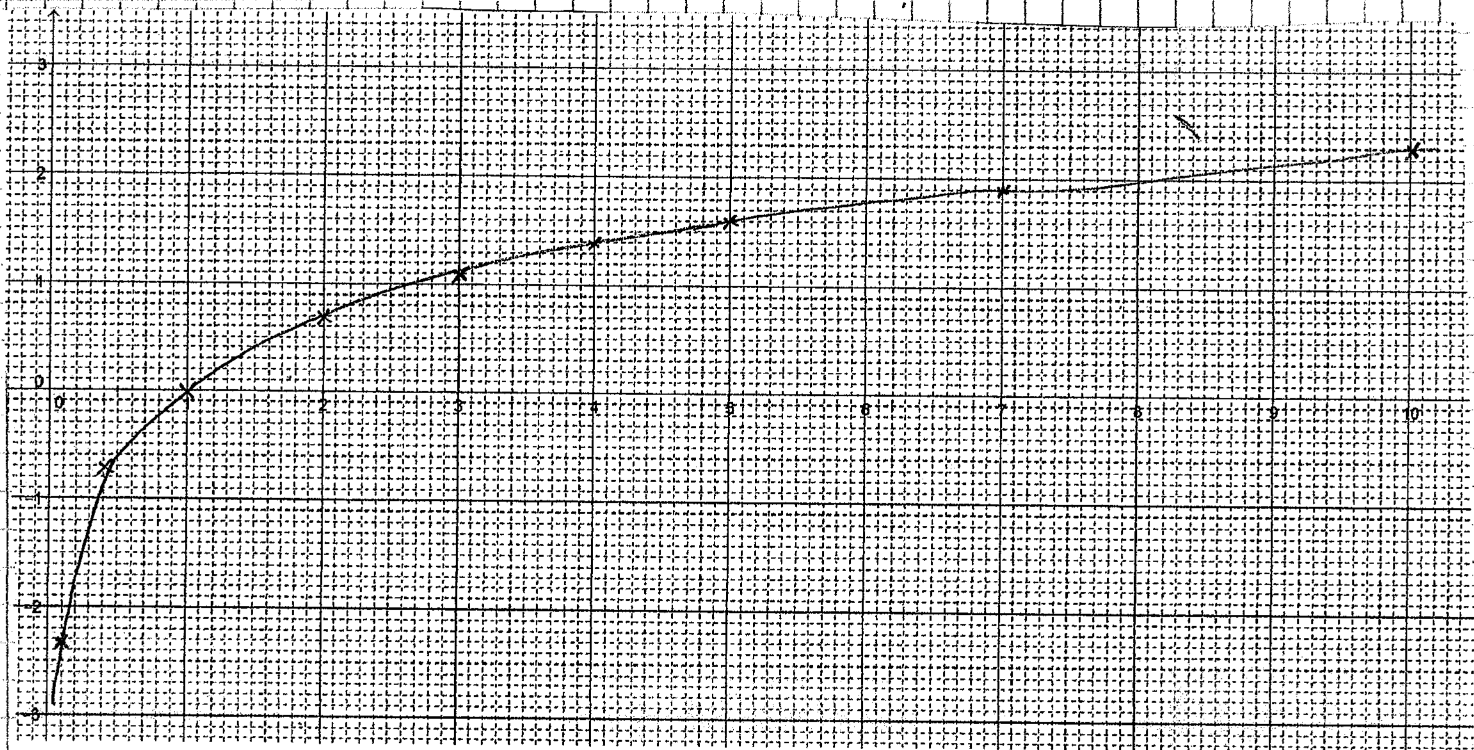
4) . si $k \leq 0$, l'équation $e^x = k$ n'a pas de solutions

. si $k > 0$, l'équation $e^x = k$ possède une seule solution.

5)

x	0,1	0,5	1	2	3	4	5	7	10
$\ln(x)$	−2,3	−0,7	0	0,7	1,1	1,4	1,6	1,9	2,3

6)



Remarques :

* Pour que $\ln x$ existe, il faut que $x > 0$

* $e^0 = 1$ donc $\ln 1 = 0$

  $e^1 = e$ donc $\ln e = 1$

Exercice 2

x	-10	$-0,1$	0	$0,1$	$0,8$	1	2	$2,5$	10	100	200	1000
$\ln e^x$	-10	$-0,1$	0	$0,1$	$0,8$	1	2	$2,5$	10	100	200	?

Il semble que :

$\boxed{\text{pour tout } x \text{ réel} \quad \ln(e^x) = x}$

Exercice 3

- $\ln(e^2) = 2$
- $\ln(e^{-3}) = -3$
- $e^{\ln -3}$ n'existe pas ($\ln -3$ n'existe pas car $-3 < 0$)
- $e^{\ln 6} = 6$
- $e^{\ln(\pi - 4)}$ n'existe pas (car $\pi - 4 < 0$)
- $e^{\ln \sqrt{5}} = \sqrt{5}$

$\frac{5}{9,5}$

Exercice 4

1) $e^x = 10 \iff \ln(e^x) = \ln 10$

$\iff x = \ln 10.$

$\boxed{\text{L'eq. } e^x = 10 \text{ possède une solution : le nombre } \ln 10}$

2) $\ln x = 12 \iff e^{\ln x} = e^{12} \iff x = e^{12}$

$\boxed{\text{L'éq. } \ln x = 12 \text{ possède une solution : le nombre } e^{12}}$

3) $e^x = -5$ Impossible car pour tout réel x, $e^x > 0$.

$\boxed{\text{L'eq. } e^x = -5 \text{ n'a pas de solutions.}}$

4) $\ln x = -5 \iff e^{\ln x} = e^{-5} \iff x = e^{-5}$

$\boxed{\text{L'eq. } \ln x = -5 \text{ possède une solution : le nombre } e^{-5}}$

6/25

Exercice 5

1) a) $5e^{x}-2=0 \iff e^{x}=\frac{2}{5} \iff x=\ln\left(\frac{2}{5}\right)$ $\boxed{S=\left\{\ln\frac{2}{5}\right\}}$

b) $2e^{x+1}-1=0 \iff e^{x+1}=\frac{1}{2} \iff x+1=\ln\frac{1}{2}$

$\iff x=\ln\frac{1}{2}-1$ $\boxed{S=\left\{\ln\frac{1}{2}-1\right\}}$

c) $\ln(x+7)+2=0 \iff \ln(x+7)=-2 \iff x+7=e^{-2}$

$\iff x=e^{-2}-7$ $\boxed{S=\left\{e^{-2}-7\right\}}$

d) $(e^{x}-5)(2\ln x+3)=0 \iff e^{x}-5=0$ ou $2\ln x+3=0$

$\iff e^{x}=5$ ou $\ln x=-\frac{3}{2} \iff x=\ln 5$ ou $x=e^{-3/2}$

$\boxed{S=\left\{\ln 5 ; e^{-3/2}\right\}}$

2) a) $4-3e^{x}>0 \iff -3e^{x}>-4 \iff e^{x}<\frac{-4}{-3} \iff e^{x}<\frac{4}{3}$

$\iff x<\ln\frac{4}{3}$ $\boxed{S=\left]-\infty ; \ln\frac{4}{3}\right[}$

b) $4+3\ln x\geq 0 \iff 3\ln x\geq -4 \iff \ln x\geq -\frac{4}{3} \iff x\geq e^{-\frac{4}{3}}$

$\boxed{S=\left[e^{-4/3} ; +\infty\right[}$

c)

x	0		$\ln 2$		e^{5}		$+\infty$
Signe de $e^{x}-2$		$-$	0	$+$		$+$	
Signe de $5-\ln x$		$+$		$+$	0	$-$	
Signe de $(e^{x}-2)(5-\ln x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

$\boxed{S=\left]\ln 2 ; e^{5}\right[}$

Exercice 6

$f(x) = \ln x$

1) Pour que $\ln x$ existe, il faut que $x > 0$

$\boxed{D_f =]0 ; +\infty[}$

2)

x	0	$+\infty$
Signe de $f'(x) = \frac{1}{x}$	||	$+$
Variations de $\ln$	|| $-\infty$ (q.4)	$\nearrow$ $+\infty$ (q.3)

3) a) $\ln x \geqslant 100 \iff e^{\ln x} \geqslant e^{100}$ (car exp est croissante)

$\iff x \geqslant e^{100}$

b) $\ln x \geqslant 1000000$ pour $x \geqslant e^{1000000}$

$$\boxed{\lim_{x \to +\infty} \ln x = +\infty}$$

4) a) $x < e^{-10} \iff \ln x < \ln e^{-10}$ (car $\ln$ est croissante)

$\iff \ln x < -10$

b) $x < e^{-1000} \iff \ln x < \ln e^{-1000} \iff \ln x < -1000$

c) Pour que $\ln x < -1000000$

il "suffit" de prendre $x < e^{-1000000}$

$$\boxed{\lim_{x \to 0} \ln x = -\infty}$$

5) Voir tableau de variations (question 2)

6) $\boxed{f(1) = \ln 1 = 0}$

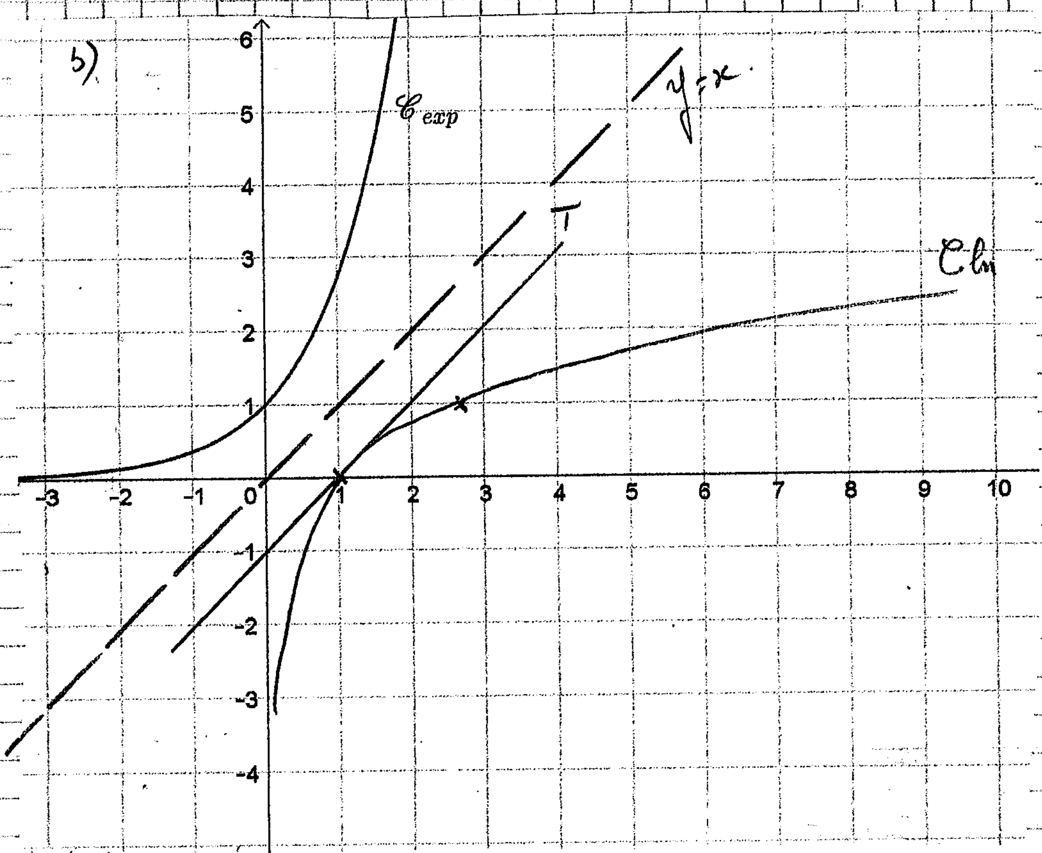
x	0		1		$+\infty$
Variations de ln	‖ $-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$
Signe de $\ln x$	‖	$-$	0	$+$	

7) $T : y = f'(1)(x-1) + f(1)$ or $f'(1) = \frac{1}{1} = 1$ et $f(1) = \ln 1 = 0$

Donc $\boxed{T : y = x - 1}$

8) a) $\left.\begin{array}{l}\ln 1 = 0 \\ \ln e = 1\end{array}\right\}$ donc $\boxed{A(1 ; 0) \text{ et } B(e ; 1) \text{ appartiennent à } \mathcal{C}_{\ln}}$

b)



$\mathcal{C}_{\ln}$ et $\mathcal{C}_{exp}$ sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$

Objectif n° 2 : Propriétés algébriques de la fonction ln

Exercice 7 :

1. Faire afficher des tableaux de valeurs pour les fonctions f et g définies sur $]\,0\,;+\infty[$ par :

$f(x) = \ln(\frac{1}{x})$ et $g(x) = \ln x$. **Conjecture** : $f(x) = -g(x)$

2. Faire afficher des tableaux de valeurs pour les fonctions f et g définies sur $]\,0\,;+\infty[$ par :

$f(x) = \ln(\sqrt{x})$ et $g(x) = \ln x$. **Conjecture** : $f(x) = \frac{1}{2}\, g(x)$

On admet que les conjectures vues ci-dessus sont vraies et on a alors :

Propriété 5

Pour tout $x > 0$:	Pour tout $x > 0$,
$\ln(\frac{1}{x}) = -\ln x$	$\ln(\sqrt{x}) = \frac{1}{2}\ln x$

$\frac{10}{25}$

Exercice 8

1) P_1 est fausse car $\ln 5 \neq \ln 2 + \ln 3$
P_2 est fausse car $\ln 2 \neq \ln 5 - \ln 3$
P_3 est fausse car $\ln 15 \neq \ln 5 \times \ln 3$

2) $\ln 3 + \ln 5 \approx 1,099 + 1,609 \approx 2,708 \approx \ln 15$

Donc $\boxed{\ln 15 \text{ et } \ln 3 + \ln 5 \text{ semblent égaux}}$

3)

❒ ln 2 + ln 3 = ln 5	❒ ln 2 × ln 3 = ln 6	☒ ln 3 + ln 2 = ln 6	❒ ln 2 × ln 3 = ln 5
☒ ln 10 + ln 2 = ln 20	❒ ln 10 × ln 2 = ln 20	❒ ln 10 × ln 2 = ln 100	❒ ln 10 + ln 2 = ln 12
❒ ln 2 + ln 3 + ln 4= ln 9	❒ ln 2 × ln 3 × ln 4 = ln 24	☒ ln 2 + ln 3 + ln 4 = ln 24	❒ Aucune des réponses prédentes

4)

- $A = \ln 100 - \ln 50 = \ln\left(\frac{100}{50}\right) = \ln 2$ $\boxed{A = \ln 2}$

- $B = \ln 4 + \ln 3 - \ln 6 = \ln(4\times 3) - \ln 6$
$B = \ln \frac{4\times 3}{6} = \ln 2$ $\boxed{B = \ln 2}$

- $C = \ln(17^2) - \ln 34 = \ln(17\times 17) - \ln 34$
$= \ln\left(\frac{17\times 17}{34}\right) = \ln\left(\frac{17\times \cancel{17}}{\cancel{17}\times 2}\right) = \ln \frac{17}{2}$
$\boxed{C = \ln \frac{17}{2}}$

- $D = \ln 7 - \ln 3 + \ln 12 - \ln 21 = \ln \frac{7\times 12}{3\times 21} = \ln \frac{\cancel{7}\times 4\times \cancel{3}}{3\times \cancel{7}\times \cancel{3}}$

$\boxed{D = \ln \frac{4}{3}}$

Exercice 9

- $\ln(a \times a) = \ln a + \ln a$

$$\boxed{\ln(a^2) = 2 \ln a}$$

- $\ln(a^3) = \ln(a \times a \times a)$

$= \ln a + \ln a + \ln a$

$= 3 \ln a$

$$\boxed{\ln(a^3) = 3 \ln a}$$

- Plus généralement $\boxed{\ln(a^n) = n \ln a}$

$\frac{12}{25}$

Exercice 10

1) a) $1{,}1^n > 5 \iff \ln(1{,}1^n) > \ln 5 \iff n \ln 1{,}1 > \ln 5$

$\iff n > \frac{\ln 5}{\ln 1{,}1}$ $\quad \frac{\ln 5}{\ln 1{,}1} \simeq 16{,}88$

$\boxed{\text{Donc } n = 5}$

b) $2{,}1^n > 7500 \iff \ln(2{,}1^n) > \ln 7500 \iff n \ln 2{,}1 > \ln 7500$

$\iff n > \frac{\ln 7500}{\ln 2{,}1}$ $\quad \frac{\ln 7500}{\ln 2{,}1} \simeq 12{,}026$

$\boxed{\text{Donc } n = 13}$

c) $0{,}7^n < 0{,}05 \iff \ln(0{,}7^n) < \ln 0{,}05 \iff n \ln 0{,}7 < \ln 0{,}05$

Donc $n > \frac{\ln 0{,}05}{\ln 0{,}7}$ (l'inégalité a changé de sens car $\ln 0{,}7 < 0$).

$\frac{\ln 0{,}05}{\ln 0{,}7} \simeq 8{,}40$ $\quad \boxed{\text{Donc } n = 9}$

2) On veut que $1 - 0{,}8^n > 0{,}99$

$1 - 0{,}8^n > 0{,}99 \iff -0{,}8^n > 0{,}99 - 1$

$\iff -0{,}8^n > -0{,}01$

$\iff 0{,}8^n < 0{,}01$

$\iff \ln 0{,}8^n < \ln 0{,}01$

$\iff n \ln 0{,}8 < \ln 0{,}01$

$\iff n > \frac{\ln 0{,}01}{\ln 0{,}8}$

$\frac{\ln 0{,}01}{\ln 0{,}8} \simeq 20{,}63$

Il faut donc lancer le dé au moins 21 fois pour avoir plus de 99% de chance d'obtenir au moins une fois la face 6

Exercice 11

$u_n = -140 \times 0,9^n + 420$

1. a- $u_0 = -140 \times 0,9^0 + 420$ $\quad \boxed{u_0 = 280}$

$u_1 = -140 \times 0,9^1 + 420$ $\quad \boxed{u_1 = 294}$

280 vélos ont été loués en Janvier 2019 et 294 en Février 2019

b) $-1 < 0,9 < 1$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} 0,9^n = 0$

$\lim\limits_{n \to +\infty} -140 \times 0,9^n = 0$

Donc $\boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 420}$

2 a)

$n \leftarrow 0$
$u \leftarrow 280$
Tant que u ...$\leqslant 380$
$n \leftarrow$ ..$n+1$..
$u \leftarrow$ ..$-140 \times 0,9^n + 420$
Fin tant que

b) A la calculatrice

$-140 \times 0,9^{11} + 420 \approx 376 < 380$

$-140 \times 0,9^{12} + 420 \approx 380,5 > 380.$

Donc $\boxed{n = 12}$

3a) $-140 \times 0,9^n + 420 > 380 \iff -140 \times 0,9^n > -40$

$\iff 0,9^n < \frac{40}{140} \iff 0,9^n < \frac{2}{7} \iff \ln 0,9^n < \ln\left(\frac{2}{7}\right)$

$\iff n \ln 0,9 < \ln \frac{2}{7} \iff n > \frac{\ln \frac{2}{7}}{\ln 0,9} \approx 11,89$

$\boxed{\text{Donc } n \geqslant 12}$

b) C'est à partir du $12^{\text{ème}}$ mois (donc décembre 2019) que la commune devra acheter des vélos supplémentaires

Exercice 12

Défi 1

$$9^n > 2025^{2026}$$

$$\ln(9^n) > \ln\left(2025^{2026}\right)$$

$$n \ln 9 > 2026 \ln(2025)$$

$$\text{Donc } n > \frac{2026 \ln(2025)}{\ln 9}$$

$$\frac{2026 \ln(2025)}{\ln 9} \simeq 7020{,}03$$

$$\boxed{\text{Donc } n = 7021}$$

Défi 2

- Méthode 1

$$\ln(1+e^x) = \ln\left(\left(\frac{1}{e^x}+1\right)e^x\right)$$

$$= \ln\left(\frac{1}{e^x}+1\right) + \ln(e^x) = \ln(e^{-x}+1) + x$$

$$\boxed{\text{Donc } \ln(1+e^x) = x + \ln(e^{-x}+1)}$$

- Méthode 2 :

$$x + \ln(e^{-x}+1) = x + \ln\left(\frac{1}{e^x}+1\right)$$

$$= x + \ln\left(\frac{1+e^x}{e^x}\right) = x + \ln(1+e^x) - \ln(e^x)$$

$$= \cancel{x} + \ln(1+e^x) - x$$

$$= \ln(1+e^x)$$

$$\text{Donc } \boxed{\ln(1+e^x) = x + \ln(e^{-x}+1)}$$

15/21

Exercice 13

$$f(x) = x\ln x - 3x + 4$$

1) $x\ln x$ est de la forme $u(x) \times v(x)$ avec
$u(x) = x$ et $v(x) = \ln x$
donc $u'(x) = 1$ et $v'(x) = \frac{1}{x}$.

Donc $f'(x) = u'(x)\,v(x) + v'(x)\,u(x) - 3$
$f'(x) = 1 \ln x + \frac{1}{x} \times x - 3 = \ln x + 1 - 3$

$\boxed{\text{Donc } f'(x) = \ln x - 2}$

2) $\ln x - 2 > 0 \iff \ln x > 2 \iff x > e^2$ $\boxed{\ln x - 2 > 0 \iff x > e^2}$

3)

x	1		e^2		20
Signe de $f'(x)$		$-$	0	$+$	
Variations de f	1	↘	$-3{,}4$	↗	3,9

4) A la calculatrice (Menu "Grapheur", on entre la fonction, "Tracer le graphique", "Calcul", "Rechercher", "zéros"), on obtient.

$\boxed{\alpha \simeq 1{,}57 \text{ et } \beta \simeq 15{,}53}$

16/21

Exercice 14

1) $f(x)=0 \iff (\ln x+1)(1-\ln x)=0$

$\iff \ln x+1=0$ ou $1-\ln x=0$

$\iff \ln x=-1$ ou $\ln x=1$

$\iff x=e^{-1}$ ou $x=e$

$\boxed{\text{L'équation } f(x)=0 \text{ possède 2 solutions : } e^{-1} \text{ et } e.}$

2) a) $\lim\limits_{x\to 0} \ln x=-\infty$ donc $\lim\limits_{x\to 0} \ln x+1=-\infty$

$\lim\limits_{x\to 0} 1-\ln x=+\infty$

par produit $\boxed{\lim\limits_{x\to 0} f(x)=-\infty}$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln x=+\infty$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln x+1=+\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} 1-\ln x=-\infty$

par produit $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty}$

3) a) $f(x)$ est de la forme $u(x)\times v(x)$ avec

$u(x)=\ln x+1$ et $v(x)=1-\ln x$

donc $u'(x)=\frac{1}{x}$ et $v'(x)=\frac{1}{x}$

$f'(x)=u'(x)v(x)+v'(x)u(x)=\frac{1}{x}(1-\ln x)+\left(-\frac{1}{x}\right)(\ln x+1)$

$f'(x)=\frac{1}{x}-\frac{\ln x}{x}-\frac{\ln x}{x}-\frac{1}{x}$. Donc $\boxed{f'(x)=\frac{-2\ln x}{x}}$

b)

x	0		1		$+\infty$
Signe de -2		$-$	|	$-$	
Signe de $\ln x$		$-$	0	$+$	
Signe de x		$+$	|	$+$	
Signe de $f'(x)$	||	$+$	0	$-$	
Variations de f	|| $-\infty$	$\nearrow$	1	$\searrow$	$-\infty$

Exercice 15

1) Pour que $f(x)$ existe, il faut que $x > 0$

Donc $\boxed{D_f =]0;+\infty[}$

2) $\lim\limits_{x \to 0} \ln x = -\infty$ donc $\lim\limits_{x \to 0} 1 + \ln x = -\infty$
$\lim\limits_{x \to 0} x = 0^+$

Par quotient $\boxed{\lim\limits_{x \to 0} f(x) = -\infty}$

La droite d'équation $x = 0$ (axe des ordonnées) est asymptote verticale à C_f.

3) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$ donc la droite d'équation $y = 0$ (axe des ordonnées) est asymptote horizontale à C_f en $+\infty$

4) $f(x) = \dfrac{1 + \ln x}{x}$ est de la forme $\dfrac{u(x)}{v(x)}$ avec

$u(x) = 1 + \ln x$ et $v(x) = x$

donc $u'(x) = \dfrac{1}{x}$ et $v'(x) = 1$

Donc $f'(x) = \dfrac{u'(x)v(x) - v'(x)u(x)}{v(x)^2}$

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x}x - 1(1 + \ln x)}{x^2} = \frac{1 - 1 - \ln x}{x^2}$$

$$\boxed{f'(x) = \frac{-\ln x}{x^2}}$$

5)

x	0		1		$+\infty$
Signe de $-\ln x$	‖	$+$	0	$-$	
Signe de x^2		$+$		$+$	
Signe de $f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	
Variations de f	‖ $-\infty$	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

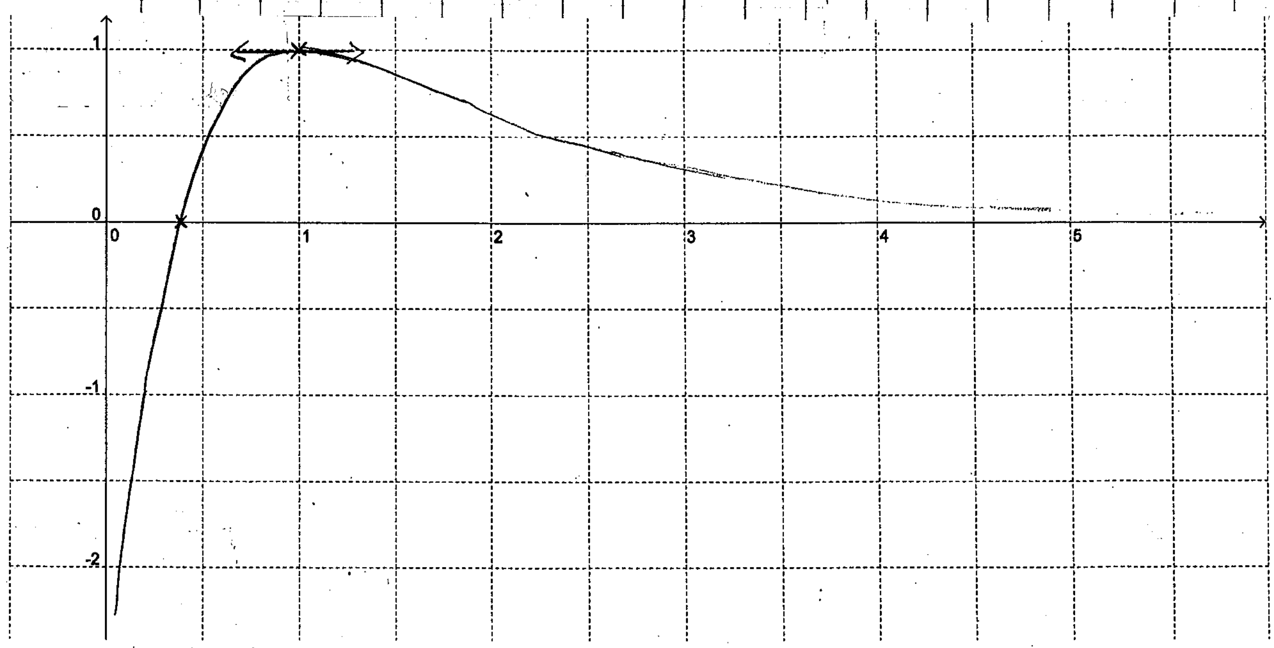
6) $f(x) = 0 \iff \dfrac{1+\ln x}{x} = 0 \iff 1 + \ln x = 0$

$\iff \ln x = -1 \iff x = e^{-1} = \dfrac{1}{e}$

$\boxed{\text{L'équation } f(x)=0 \text{ possède une unique solution : } \frac{1}{e}}$

7)

x	0		$\frac{1}{e}$		1		$+\infty$
Variations de f	‖	$-$ $\nearrow$	0	$+$ $\nearrow$	1	$\searrow$ $+$	0
Signe de $f(x)$	‖	$-$	0	$+$			



19/21

Exercice 16

1) $f(x) = \dfrac{x+2-\ln x}{x}$ est de la forme $\dfrac{u(x)}{v(x)}$ avec

$u(x) = x+2-\ln x$ et $v(x) = x$

donc $u'(x) = 1 - \dfrac{1}{x}$ et $v'(x) = 1$

$$f'(x) = \frac{u'(x)v(x) - v'(x)u(x)}{v(x)^2} = \frac{\left(1-\frac{1}{x}\right)x - 1(x+2-\ln x)}{x^2}$$

$$f'(x) = \frac{x-1-x-2+\ln x}{x^2} \qquad \boxed{f'(x) = \frac{-3+\ln x}{x^2}}$$

2) $-3+\ln x > 0 \iff \ln x > 3 \iff x > e^3$

Donc $\boxed{-3+\ln x > 0 \iff x > e^3}$

3)

x	1		e^3		25
Signe de $-3+\ln x$		$-$	0	$+$	
Signe de x^2		$+$		$+$	
Signe de $f'(x)$		$-$	0	$+$	
Variations de f	3	$\searrow$	$0{,}95$	$\nearrow$	$0{,}951$

4) A la calculatrice (Menu "Grapheur", rentrer la fonction, 5 "Tracer le Graphique", "Calcul", "Rechercher", "Antécédents", "1,5"), on trouve $\alpha \approx 2{,}318$

Donc $\boxed{2{,}31 \leq \alpha \leq 2{,}32}$

Partie B

5) D'après le tableau de variations de la question 3, $f(x)$ est minimal pour $x = e^3$

$e^3 \approx 20,09$

Il faut donc produire environ 2009 pièces pour obtenir un coût moyen minimal.

$f(e^3) \approx 0,95$

Le coût moyen minimal est donc de 0,95 € environ

6) D'après le tableau de variations de la question 3, $f(x) \leq 1,5$ pour $x \geq \alpha$

$2,31 \leq \alpha \leq 2,32$

Il faut donc produire au moins 232 pièces pour que le coût moyen soit inférieur à 1,50 €

Exercice 17

1) $f(x) = \ln(3x+5)$ est de la forme $\ln(u(x))$

avec $u(x) = 3x+5$ donc $u'(x) = 3$

$$f'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)} = \frac{3}{3x+5} \quad \text{donc} \quad \boxed{f'(x) = \frac{3}{3x+5}}$$

2) $g(x) = \ln(x^2+1)$ est de la forme $\ln(u(x))$

avec $u(x) = x^2+1$ donc $u'(x) = 2x$

$$g'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)} = \frac{2x}{x^2+1} \quad \text{donc} \quad \boxed{g'(x) = \frac{2x}{x^2+1}}$$

22/25

Exercice 18

Partie A

1) $f(x) = -0{,}25x^2 + 2x + 3\ln(x+1) - 1{,}75 - 3\ln 2$

$f(1) = -0{,}25 + 2 + 3\ln 2 - 1{,}75 - 3\ln 2 = 0$ $\boxed{f(1) = 0}$

2) . $\ln(x+1)$ est de la forme $\ln(u(x))$ avec $u(x) = x+1$

Donc la dérivée de $\ln(x+1)$ est $\dfrac{1}{x+1}$

$f(x) = -0{,}25x^2 + 2x + 3\ln(x+1) - 1{,}75 - 3\ln 2$

$f'(x) = -0{,}25 \times 2x + 2 + 3 \times \dfrac{1}{x+1} - 0 - 0$

$f'(x) = -0{,}5x + 2 + \dfrac{3}{x+1} = \dfrac{(-0{,}5x+2)(x+1)+3}{}$

$f'(x) = \dfrac{-0{,}5x^2 - 0{,}5x + 2x + 2 + 3}{x+1} = \dfrac{-0{,}5x^2 + 1{,}5x + 5}{x+1}$

Or $(x+2)(2{,}5 - 0{,}5x) = 2{,}5x - 0{,}5x^2 + 5 - x = -0{,}5x^2 + 1{,}5x + 5$

Donc $\boxed{f'(x) = \dfrac{(x+2)(2{,}5-0{,}5x)}{x+1}}$

3)

x	0		5		8
Signe de $x+2$		+	|	+	
Signe de $2{,}5-0{,}5x$		+	0	−	
Signe de $x+1$		+	|	+	
Signe de $f'(x)$		+	0	−	
Variations de f	$-3{,}829$	↗	$5{,}296$	↘	$2{,}462$

$\frac{23}{25}$

4) a)
b)

x	0		1		5		8
Variations de f	$-3{,}829$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$5{,}296$	$\searrow$	$2{,}762$
Signe de $f(x)$		$-$	0	$+$			

Partie B

5 a) D'après la question 3, $f(x)$ est maximal pour $x = 5$

$\boxed{\text{Le bénéfice sera maximal pour 5000 guirlandes vendues}}$

b) Le maximum de $f(x)$ vaut environ 5,296

$\boxed{\text{Le bénéfice maximal sera d'environ 5296 €}}$

6) D'après la question 4, $f(x) \geq 0$ pour $x \geq 1$

$\boxed{\text{Pour réaliser un bénéfice sur ce produit, le supermarché doit vendre au moins 1000 guirlandes}}$

Exercice 19

1) Pour que $f(x)$ existe, il faut que $x+2>0$

Donc que $x>-2$.

$$\boxed{D_f =]-2\,;+\infty[}$$

2) a) $f(x) = 1 + \underbrace{x \ln(x+2)}_{u \times v}$

$$f'(x) = 0 + \underbrace{1 \times \ln(x+2) + \frac{1}{x+2} \times x}_{u'v + v'u}$$

$$\boxed{f'(x) = \ln(x+2) + \frac{x}{x+2}}$$

b) $f'(x) = \ln(x+2) + \underbrace{\frac{x}{x+2}}_{\frac{u}{v}}$

$$f''(x) = \frac{1}{x+2} + \underbrace{\frac{1(x+2) - 1 \times x}{(x+2)^2}}_{\frac{u'v - v'u}{v^2}} = \frac{1}{x+2} + \frac{2}{(x+2)^2}$$

$$f''(x) = \frac{(x+2)+2}{(x+2)^2} \qquad \boxed{f''(x) = \frac{x+4}{(x+2)^2}}$$

3)

x	-1		$+\infty$
Signe de $x+4$		$+$	
Signe de $(x+2)^2$		$+$	
Signe de $f''(x)$		$+$	
Variations de f'	-1	$\nearrow$	

$-1 \leftarrow f'(-1) = -1$

25/25

4) a) A la calculatrice $\boxed{\alpha \approx -0,5}$

b)

x	-1		α		$+\infty$
Variations de f'		↗	0	↗	
Signe de $f'(x)$		$-$	0	$+$	

5)

x	-1		α		$+\infty$
Signe de $f'(x)$		$-$	0	$+$	
Variations de f	1	↘	$0,8$	↗	

. $f(-1) = 1 - 1 \times \ln 1 = 1$.

. $f(\alpha) \approx f(-0,5) \approx 0,8$

6) $\lim\limits_{x \to +\infty} x + 2 = +\infty$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln(x+2) = +\infty$

$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to +\infty} \ln(x+2) = +\infty \\ \lim\limits_{x \to +\infty} x = +\infty \end{array}\right\}$ Donc par produit $\lim\limits_{x \to +\infty} x \ln(x+2) = +\infty$

et donc $\lim\limits_{x \to +\infty} 1 + x \ln(x+2) = +\infty$

$$\boxed{\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty}$$