

Terminales Maths Complémentaires

Les logarithmes (*logos* = rapport, *arithmeticos* = nombres) sont apparus grâce au mathématicien Écossais John Napier (1550 – 1617) qui cherchait à simplifier les calculs astronomiques. Les mathématiciens de l'époque cherchaient en effet des relations entre des suites géométriques et des suites arithmétiques permettant de transformer des produits (difficiles à calculer) en sommes (beaucoup plus simples à calculer).

La fonction logarithme népérien

I - Définitions

Définitions 1

Pour tout réel x strictement positif, il existe un unique réel, noté $\ln(x)$ (ou plus simplement $\ln x$), tel que $e^{\ln(x)} = x$.
 Pour x strictement positif, $\ln x$ est donc l'unique antécédent de x par la fonction exponentielle.
 La fonction qui à tout réel x strictement positif associe $\ln(x)$ s'appelle la fonction logarithme népérien et se note \ln .
 Ainsi, la fonction \ln est définie sur $]0; +\infty[$ par : $x \rightarrow \ln(x)$

Valeurs particulières : $\ln 1$ est l'unique antécédent de 1 par la fonction exponentielle et comme $e^0 = 1$, on a : $\ln 1 = 0$;
 $\ln e$ est l'unique antécédent de e par la fonction exponentielle et comme $e^1 = e$, on a : $\ln e = 1$

Propriétés 2

- * pour tout réel quelconque x , on a : $\ln e^x = x$.
- * pour tout réel x strictement positif, on a $e^{\ln(x)} = x$
- * si x est un réel positif et si y est un réel, on a : $\ln x = y \Leftrightarrow x = e^y$

Exemples : * $\ln e^{-3} = -3$;

- * Résoudre l'équation $2 \ln x - 1 = 7$
 (On trouve $x = e^4$)

II - Propriétés calculatoires

Propriétés 3

Si a et b sont deux réels strictement positifs quelconques et n un entier relatif quelconque, alors on a :

$$\ln(a \times b) = \ln a + \ln b$$

$$\ln \frac{1}{a} = -\ln a$$

$$\ln \frac{a}{b} = \ln a - \ln b$$

$$\ln \sqrt{a} = \frac{1}{2} \ln a$$

$$\ln a^n = n \ln a$$

III - Equations et inéquations

Exemples :

Résoudre l'équation $3e^x - 1 = 0$

$$3e^x - 1 = 0 \Leftrightarrow 3e^x = 1 \Leftrightarrow e^x = \frac{1}{3}$$

En appliquant la fonction \ln aux deux membres de cette égalité, on obtient :

$$\ln(e^x) = \ln\left(\frac{1}{3}\right) \Leftrightarrow x = \ln\left(\frac{1}{3}\right) \text{ c'est-à-dire } x = -\ln 3$$

Donc l'équation $3e^x - 1 = 0$ possède une solution :
le nombre $-\ln 3$

Résoudre l'équation $(2 \ln x + 1)(4 - \ln x) = 0$

$$(2 \ln x + 1)(4 - \ln x) = 0 \Leftrightarrow 2 \ln x + 1 = 0 \text{ ou } 4 - \ln x = 0$$

$$\Leftrightarrow \ln x = -\frac{1}{2} \text{ ou } \ln x = 4$$

Dans chacune des égalités ci-dessus, en appliquant la fonction exponentielle aux deux membres, on obtient :

$$e^{\ln x} = e^{-\frac{1}{2}} \text{ ou } e^{\ln x} = e^4$$

$$\text{c'est-à-dire } x = e^{-\frac{1}{2}} \text{ ou } x = e^4$$

Donc l'équation $(2 \ln x + 1)(4 - \ln x) = 0$ possède
deux solutions : $e^{-\frac{1}{2}}$ et e^4

Résoudre l'inéquation $e^{3x-1} - 2 < 0$

$$e^{3x-1} - 2 < 0 \Leftrightarrow e^{3x-1} < 2 \Leftrightarrow 3x-1 < \ln 2$$

$$\Leftrightarrow 3x < 1 + \ln 2 \Leftrightarrow x < \frac{1 + \ln 2}{3}$$

Donc $S =]-\infty; \frac{1 + \ln 2}{3}[$

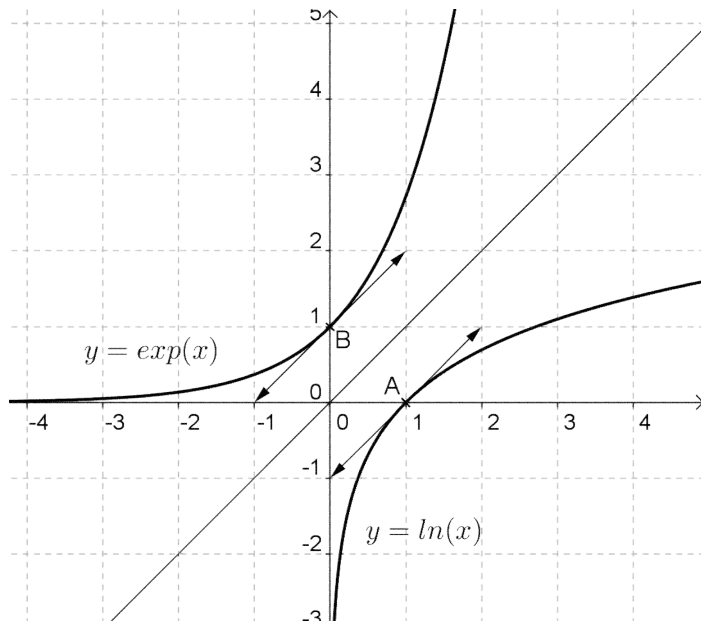
Résoudre l'inéquation $5 \ln(x+3) \geq 2$

$$5 \ln(x+3) \geq 2 \Leftrightarrow \ln(x+3) \geq \frac{2}{5} \Leftrightarrow x+3 \geq e^{\frac{2}{5}}$$

$$\Leftrightarrow x \geq e^{\frac{2}{5}} - 3 \text{ Donc } S = [e^{\frac{2}{5}} - 3; +\infty[$$

IV - Variations et représentation graphique de la fonction ln

Nommons \mathcal{C}_{exp} et \mathcal{C}_{ln} les courbes représentatives respectives des fonctions exp et ln dans un repère orthonormal.



Propriétés 5

- * \mathcal{C}_{exp} et \mathcal{C}_{ln} sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$.
- * la fonction ln est dérivable sur $]0; +\infty[$ et on a pour tout x réel strictement positif :

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}$$

Tableau de variations :

| | | | |
|--------------------------|---------------|--------|----------------|
| x | 0 | 1 | $+\infty$ |
| $(\ln x)' = \frac{1}{x}$ | | + | |
| $\ln x$ | $-\infty$ | ↗ 0 | ↗ $+\infty$ |

Propriétés 6

- * $\lim_{x \rightarrow 0} \ln x = -\infty$ (l'axe des ordonnées est asymptote verticale à \mathcal{C}_{ln})
- * $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$
- * la tangente à \mathcal{C}_{ln} au point d'abscisse 1 a pour équation $y = x - 1$

Tableau de signe de $\ln x$:

| | | | |
|------------------|---------------|--------|----------------|
| x | 0 | 1 | $+\infty$ |
| $\ln x$ | $-\infty$ | ↗ 0 | ↗ $+\infty$ |
| Signe de $\ln x$ | | - | 0 + |

V – Fonctions de la forme $\ln(u)$ (u étant une fonction de x)

Propriété 7

si u est une fonction strictement positive et dérivable sur un intervalle I , alors la fonction $\ln(u)$ est elle aussi dérivable sur I et on a :

$$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$$