Term - Maths Complémentaires

Les mathématiciens ont fait des probabilités une science.
Les compagnies d'assurances par exemple utilisent les probabilités pour mesurer les risques qu'elles prennent (par exemple : *quelle est la probabilité qu'un conducteur de telle catégorie sociale ait un accident dans les deux ans à venir ?*) et fixent ainsi leurs tarifs.

Probabilités conditionnelles

I - Probabilités conditionnelles

Définition

Soient A et B deux évènements avec $p(B) \neq 0$.
On note $p_B(A)$ la probabilité de l'événement A sachant que l'événement B est réalisé.

On dit que c'est une probabilité conditionnelle et on a : $\boxed{p_B(A) = \dfrac{p(A \cap B)}{p(B)}}$

Remarques **:**

1. si $p(A) \neq 0$, on a alors $p_A(B) = \dfrac{p(A \cap B)}{p(A)}$

2. Si A et B sont deux évènements incompatibles (c'est-à-dire tels que $p(A \cap B) = 0$) alors on a $p_B(A) = 0$

Attention ! il ne faut pas confondre $p(A \cap B)$, $p_A(B)$ et $p_B(A)$. Il faut donc bien savoir reconnaître une probabilité conditionnelle dans un énoncé. Les expressions « **sachant que** ... », « **quand** ... », « **lorsque** ... », « **parmi** ... » sont souvent utilisées pour donner une probabilité conditionnelle. En effet, ces expressions annoncent qu'on ne se place plus dans l'univers tout entier mais seulement dans une partie de celui ci. C'est ce "nouvel" univers qui est alors noté en indice.

Propriétés :

1. si A et B sont deux événements avec $p(A) \neq 0$ et $p(B) \neq 0$ alors on a :

$\boxed{p(A \cap B) = p_B(A) \times p(B)}$ **et** $\boxed{p(A \cap B) = p_A(B) \times p(A)}$

2. si A et B sont deux événements avec $p(A) \neq 0$ alors on a : $\boxed{p_A(\overline{B}) = 1 - p_A(B)}$

II - Arbre des probabilités

Un arbre de probabilité permet souvent de faciliter le raisonnement.
Les règles de construction sont les suivantes :

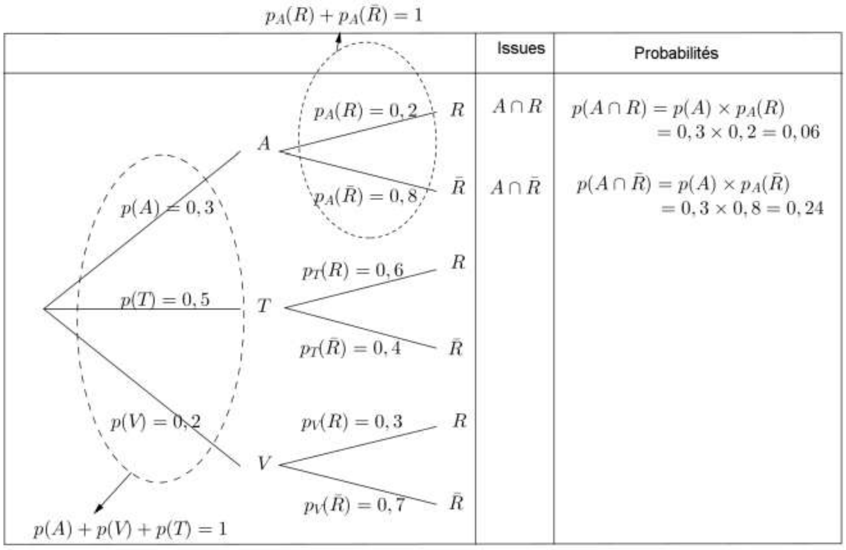
- **la somme des probabilités des branches issues d'un même nœud est égale à 1;**
- **la probabilité d'une intersection s'obtient en multipliant les probabilités des branches du chemin correspondant;**
- **en dehors des branches du premier niveau, les probabilités indiquées sont des probabilités conditionnelles.**

Exemple : Une enquête a été réalisée auprès de touristes visitant Paris. Cette enquête révèle que, pour se rendre dans la capitale française, 30% de ces touristes ont utilisé l'avion, 50% ont utilisé le train et les autres sont venus en voiture.
Parmi les touristes interrogés ayant utilisé l'avion, 20% sont restés à Paris plus d'une semaine, parmi ceux qui ont choisi le train, ils étaient 60% et parmi ceux venus en voiture, 30 % sont restés à Paris plus d'une semaine.

On interroge au hasard un touriste ayant répondu à l'enquête. On note :

* A l'évènement « Le touriste interrogé a voyagé en avion ».
* T l'évènement « Le touriste interrogé a voyagé en train ».
* V l'évènement « Le touriste interrogé a voyagé en voiture ».
* R l'évènement « Le touriste interrogé est resté à Paris plus d'une semaine ».

Voici un arbre pondéré correspondant
à cette situation :



IV - Formules des probabilités totales

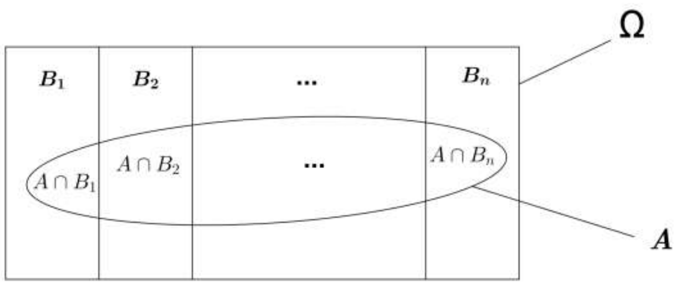
Définition

Considérons une expérience aléatoire et appelons Ω son univers. On dit que des événements B_1, B_2, ..., B_n forment une **partition** de Ω lorsqu'ils sont deux à deux incompatibles et que leur réunion est égale à Ω.

Propriété (formule des probabilités totales) :

Considérons une expérience aléatoire et appelons Ω son univers.
Soit A un évènement quelconque. Si des événements B_1, B_2, ..., B_n forment une partition de Ω alors on a :

$$\boxed{p(A)=p(A\cap B_1)+p(A\cap B_2)+\ldots+p(A\cap B_n)}$$



Exemple **:** dans l'exemple précédent, si l'on veut déterminer la probabilité qu'un touriste soit resté plus d'une semaine (c.a.d. $p(S)$), on a : $p(S)=p(A\cap R)+p(T\cap R)+p(V\cap R)=0,3\times 0,2+0,5\times 0,6+0,2\times 0,3=0,06+0,3+0,06=0,42$

V - Evénements indépendants

Définition

Soient A et B deux événements tels que $p(A)\neq 0$ et $p(B)\neq 0$.
On dit que A et B sont indépendants lorsque la réalisation de l'un ne dépend pas de celle de l'autre, c'est-à-dire :

$\boxed{p_B(A)=p(A)}$ (ou encore $\boxed{p_A(B)=p(B)}$)

Remarque **:** l'indépendance de deux événements peut être une hypothèse de l'énoncé mais peut parfois découler des conditions de l'expérience aléatoire. Par exemple, deux tirages successifs dans une urne, avec remise, donnent deux résultats indépendants l'un de l'autre; ce n'est pas le cas dès lors qu'il n'y a pas remise.

Propriétés

1. soient A et B deux événements tels que $p(A)\neq 0$ et $p(B)\neq 0$.

A et B sont **indépendants** si et seulement si $\boldsymbol{p(A\cap B)=p(A)\times p(B)}$

2. soient A et B deux événements tels que $p(A)\neq 0$ et $p(B)\neq 0$.

Si A et B sont indépendants alors $\bar{A}$ et B sont aussi indépendant (ainsi que " A et $\bar{B}$ " et que " $\bar{A}$ et $\bar{B}$ ")