

**Epreuve de Bernoulli – Loi binomiale – Loi géométrique**

**I - Epreuve de Bernoulli - Loi binomiale**

**Définitions 1**

Une **épreuve de Bernoulli** est une expérience aléatoire conduisant à deux issues :

\* l'une ( souvent appelée "Succès" ) de probabilité  $p$

\* l'autre appelée "Echec" de probabilité  $q = 1 - p$

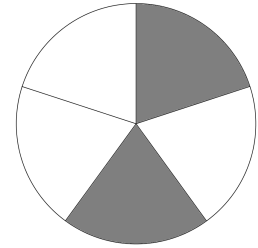
*Exemple* : la roue ci-contre est composée de 5 secteurs identiques.

Lorsqu'on lance cette roue, on gagne 1 point si le secteur obtenu est gris.

On peut alors considérer cette expérience aléatoire comme une épreuve de Bernoulli avec :

S : " obtenir un secteur gris " ;  $p = \frac{2}{5} = 0,4$

E : " obtenir un secteur blanc " ;  $q = 1 - p = \frac{3}{5} = 0,6$



**II – Loi binomiale**

**a. Définition – Calcul des probabilités**

**Définition et propriétés 2**

\* On répète  $n$  fois une même épreuve de Bernoulli **dans des conditions d'indépendance** ( c'est-à-dire que le résultat d'une épreuve n'a aucune influence que le résultat d'une autre ).

\* On considère la variable aléatoire  $X$  égale au nombre de succès obtenus.

\* Par définition, on dit que  **$X$  suit la loi binomiale** de paramètres  $n$  ( nombre d'épreuves ) et  $p$  ( probabilité du succès ), notée  $\mathcal{B}(n,p)$ .

On a alors  $p(X = k) = \binom{n}{k} \times p^k \times (1 - p)^{n-k}$  ( $p(X = k)$  désigne la probabilité d'obtenir  $k$  succès à l'issue des  $n$  répétitions )

$\binom{n}{k}$  s'appelle un coefficient binomial; on peut l'obtenir à la calculatrice avec les touches :



*Exemple* : On lance 6 fois la roue précédente. On désigne par  $X$  la variable aléatoire égale au nombre total de points obtenus.

1) Calculer	<p>a) <math>p(X = 2)</math></p> $p(X=2) = \binom{6}{2} \times 0,4^2 \times 0,6^4$ $p(X=2) = 15 \times 0,4^2 \times 0,6^4$ $p(X=2) \approx 0,31$	<p>b) <math>p(X = 0)</math></p> $p(X = 0) = \binom{6}{0} \times 0,4^0 \times 0,6^6$ $p(X = 0) = 0,6^6$ $p(X = 0) \approx 0,047$	<p>c) <math>p(X \geq 5)</math></p> $p(X \geq 5) = P(X = 5) + P(X = 6)$ $p(X \geq 5) = \binom{6}{5} \times 0,4^5 \times 0,6^1 + 0,4^6$ $p(X \geq 5) \approx 0,035$
-------------	---	---	---

2) Quelle est la probabilité de gagner au moins 1 point ?


On cherche  $p(X \geq 1) = p(X = 1) + p(X = 2) + \dots + p(X = 6)$

Il est plus aisé d'utiliser l'évènement contraire et d'écrire :  $p(X \geq 1) = 1 - p(X = 0) = 1 - 0,6^6 \approx 0,953$

**b. Utilisation de la calculatrice pour vérifier les probabilités avec la loi binomiale.**

Soit  $X$  une variable aléatoire qui suit la loi binomiale de paramètres  $n$  et  $p$ . On peut obtenir une valeur approchée de  $p(X = k)$ , de  $p(X \leq k)$  ... à la calculatrice :



Cliquer sur l'icône  pour sélectionner celle concernant la probabilité cherchée.

### c. Espérance mathématique d'une loi binomiale - Variance d'une loi binomiale

#### Propriété 3

Si  $X$  est une variable aléatoire qui suit une loi binomiale  $\mathcal{B}(n, p)$  alors :

son espérance mathématique vaut :

$$E(X) = n \times p$$

sa variance vaut :

$$V(X) = n \times p \times (1 - p)$$

son écart-type vaut :

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$$

### III – Loi géométrique

#### a. Définition – Calcul des probabilités

##### Définitions – Propriétés 5

- \* On considère une épreuve de Bernoulli. On note  $p$  la probabilité du succès.
- \* On répète cette épreuve de Bernoulli dans des conditions d'indépendance **jusqu'à obtenir le 1<sup>er</sup> succès**.
- \* On considère la variable aléatoire  $X$  qui compte le nombre d'épreuves nécessaires pour avoir le 1<sup>er</sup> succès. On dit que  $X$  suit **la loi géométrique** de paramètre  $p$ .

→  $X$  prend ses valeurs dans l'ensemble  $\{ 1 ; 2 ; 3 ; \dots \}$

→ Pour tout entier  $k \geq 1$  : 
$$p(X = k) = (1 - p)^{k-1} \times p$$

##### Propriétés 6 (admisses)

Soit  $X$  une variable aléatoire qui suit la loi géométrique de paramètre  $p$  :

\* alors l'espérance de  $X$  vaut :  $E(X) = \frac{1}{p}$

\* Pour tout entier naturel  $k \geq 1$  :  $p(X > k) = (1 - p)^k$  ( et donc :  $p(X \leq k) = 1 - (1 - p)^k$  )

##### Propriété 7

Soit  $X$  une variable aléatoire qui suit la loi géométrique de paramètre  $p$ .

Pour tous entiers naturels  $n \geq 1$  et  $k \geq 1$ ,  $p_{X > n}(X > n + k) = p(X > k)$

**Remarque** : La propriété 7 signifie que les lois géométriques sont **des lois sans mémoire**; cela signifie que devoir attendre plus de  $k$  épreuves avant d'obtenir un succès a la même probabilité que l'on parte de la 1<sup>ère</sup> épreuve ou que l'on parte de la  $n^{\text{ième}}$  épreuve sachant que l'on a pas obtenu de succès pour ces  $n$  premières épreuves.

**Exemple** : Reprenons l'épreuve de Bernoulli du I ( de probabilité de succès  $p = 0,4$  ) que l'on répète avec remise.

Si  $Y$  désigne la variable aléatoire donnant le numéro du tirage donnant une boule blanche pour la 1<sup>ère</sup> fois,  $Y$  suit la loi géométrique de paramètre  $p = 0,4$ .

On a par exemple :

- $p(Y = 3) = (1 - 0,4)^2 \times 0,4 = 0,144$  ( il y a 14,4 % de chance d'obtenir une boule blanche pour la 1<sup>ère</sup> fois au 3<sup>ème</sup> tirage ).
- $p(Y > 3) = (1 - 0,4)^3 = 0,216$  et donc  $p(Y \leq 3) = 0,784$  ( il y a 78,4 % de chance d'obtenir une boule blanche avant le 4<sup>ème</sup> tirage ).
- $E(Y) = \frac{1}{0,4} = 2,5$ . En moyenne, on obtient une boule blanche pour la 1<sup>ère</sup> fois entre le 2<sup>ème</sup> et le 3<sup>ème</sup> tirage.
- $p_{Y > 3}(Y > 5) = p(Y > 2) = (1 - 0,4)^2 = 0,36$ . Si une boule blanche n'est pas sortie aux trois premiers tirages, il y a 36 % de chance qu'elle ne sorte pas avant le 6<sup>ème</sup> tirage.

Tous ces calculs peuvent être vérifiés à la calculatrice :

