Maths Complémentaires - DS 3 - Corrigé

Exercice 1 : **3 points**

Soit f une fonction dont le tableau de variations est donné ci-contre :
On nomme $\mathscr{C}f$ sa courbe représentative.

x	$-\infty$	1	5	$+\infty$
Signe de $f'(x)$	+	‖ +	0	−
Variations de f	$-\infty$ ↗ $+\infty$	‖ $-\infty$ ↗	4	↘ -2

1. Par simple lecture du tableau de variations, indiquer la valeur de chacune des limites ci-dessous :

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$	$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -2$	$\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x>1}} f(x) = -\infty$	$\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x<1}} f(x) = +\infty$

2. La courbe $\mathscr{C}f$ admet-elle une asymptote verticale ? Si oui, préciser son équation

La droite d'équation $x = 1$ est une asymptote verticale à $\mathscr{C}f$

3. La courbe $\mathscr{C}f$ admet-elle une asymptote horizontale ? Si oui, préciser où ainsi que son équation :

La droite d'équation $y = -2$ est une asymptote horizontale à $\mathscr{C}f$ au voisinage de $+\infty$.

Exercice 2 : *les deux parties de cet exercice sont indépendantes* **4 points**

Partie A : On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R} - \{3\}$ par $f(x) = \dfrac{5x+1}{6-2x}$.

1. Déterminer la limite de f au voisinage de $+\infty$ en justifiant clairement la réponse.

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{5x}{-2x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{5}{-2} = -\dfrac{5}{2}$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\dfrac{5}{2}$

2. Déterminer la limite de f au voisinage de 3^+ en justifiant clairement la réponse.

$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 3} 5x+1 = 16 \\ \lim\limits_{x \to 3^+} 6-2x = 0^- \end{array}\right\}$ Donc par quotient

$\lim\limits_{x \to 3^+} f(x) = -\infty$

Partie B : On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R} - \{-1\}$ par $g(x) = \dfrac{-2x^3-5}{x+1}$.

3. Déterminer la limite de g au voisinage de $-\infty$ en justifiant clairement la réponse.

$\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{-2x^3}{x} = \lim\limits_{x \to -\infty} -2x^2 = -\infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = -\infty$

4. Déterminer la limite de g au voisinage de -1^- en justifiant clairement la réponse.

$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -1} -2x^3-5 = -3 \\ \lim\limits_{x \to -1^-} x+1 = 0^- \end{array}\right\}$ Donc par quotient

$\lim\limits_{x \to -1^-} g(x) = +\infty$

Exercice 3 :

Soient f_1, f_2, f_3, f_4 et f_5 cinq fonctions définies au voisinage de $+\infty$. On donne les limites ci-dessous :

$\lim\limits_{x\to+\infty} f_1(x)=2$	$\lim\limits_{x\to+\infty} f_2(x)=+\infty$	$\lim\limits_{x\to+\infty} f_3(x)=0^-$	$\lim\limits_{x\to+\infty} f_4(x)=0^+$	$\lim\limits_{x\to+\infty} f_5(x)=-\infty$

Déterminer, si possible, la limite indiquée. Si l'on est en présence d'une forme indéterminée, répondre par l'abréviation F.I. et indiquer la forme de la forme indéterminée.

$\lim\limits_{x\to+\infty} f_1(x)-f_2(x) =$ $-\infty$	$\lim\limits_{x\to+\infty} f_2(x)\times f_3(x) =$ FI : " $\infty \times 0$ "
$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f_1(x)}{f_3(x)} =$ $-\infty$	$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f_2(x)}{f_4(x)} =$ $+\infty$
$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f_4(x)}{f_3(x)} =$ FI " $\frac{0}{0}$ "	$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f_1(x)}{f_2(x)} =$ 0
$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f_3(x)}{f_5(x)} =$ 0	$\lim\limits_{x\to+\infty} f_2(x)+f_4(x) =$ $+\infty$
$\lim\limits_{x\to+\infty} f_2(x)+f_5(x) =$ FI " $\infty - \infty$ "	$\lim\limits_{x\to+\infty} f_2(x)-f_5(x) =$ $+\infty$
$\lim\limits_{x\to+\infty} f_2(x)\times f_5(x) =$ $-\infty$	$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f_2(x)}{f_5(x)} =$ FI " $\frac{\infty}{\infty}$ "

Exercice 4

1) $f(0) = \dfrac{e^0 - 2}{e^0 + 1} = \dfrac{1-2}{1+1} = \dfrac{-1}{2}$ $\boxed{f(0) = -\dfrac{1}{2}}$

2) a) $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x - 2 = +\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} e^x + 1 = +\infty$

Donc par quotient on obtient une F.I. "$\dfrac{\infty}{\infty}$"

b) $f(x) = \dfrac{e^x - 2}{e^x + 1} = \dfrac{e^x\left(1 - \frac{2}{e^x}\right)}{e^x\left(1 + \frac{1}{e^x}\right)} = \dfrac{1 - \frac{2}{e^x}}{1 + \frac{1}{e^x}}$

$\lim\limits_{x \to +\infty} 1 - \dfrac{2}{e^x} = 1$

$\lim\limits_{x \to +\infty} 1 + \dfrac{1}{e^x} = 1$

donc par quotient

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \dfrac{1}{1} = 1$

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 1$

donc la droite d'équation $y = 1$ est une asymptote horizontale à C_f au voisinage de $+\infty$

3) On doit prouver que $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -2$

$\lim\limits_{x \to -\infty} e^x - 2 = -2$

$\lim\limits_{x \to -\infty} e^x + 1 = 1$

donc par quotient

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -2$

La droite d'équation $y = -2$ est donc une asymptote horizontale à C_f en $-\infty$

4) a) $f(x) = \dfrac{e^x - 2}{e^x + 1}$

donc $f'(x) = \dfrac{e^x(e^x+1) - e^x(e^x-2)}{(e^x+1)^2}$

$f'(x) = \dfrac{\cancel{(e^x)^2} + e^x - \cancel{(e^x)^2} + 2e^x}{(e^x+1)^2}$

$\boxed{f'(x) = \dfrac{3e^x}{(e^x+1)^2}}$

b)

x	$-\infty$ $\qquad\qquad$ $+\infty$
Signe de $3e^x$	+
Signe de $(e^x+1)^2$	+
Signe de $f'(x)$	+
Variations de f	$-2 \nearrow 1$

5)