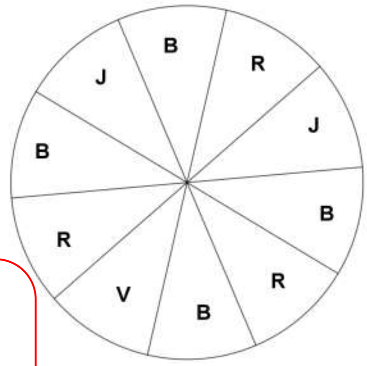
Objectif n° 1 : Généralités sur les probabilités : rappels de 2nde et de 1ère

Exercice 1 :



Un magasin propose à ses clients une loterie pour gagner des bons d'achat. Le client fait tourner une roue de loterie comportant 4 couleurs disposées en 10 secteurs identiques suivant le dessin ci-contre (B : Bleu ; R : Rouge ; J : Jaune ; V : Vert)

1.

Définitions 1

On appelle **expérience aléatoire** une expérience dont on ne peut pas prévoir le résultat à l'avance puisqu'il dépend du hasard.
On appelle **issue** chaque résultat possible d'une expérience aléatoire.
On appelle **univers** et on note Ω (se lit « oméga ») l'ensemble des issues de cette expérience aléatoire.
Le nombre d'issues contenues dans Ω s'appelle le **cardinal** de Ω et se note ***card* Ω**

a. Déterminer l'univers Ω de cette expérience aléatoire.

b. Déterminer *card* Ω .

2. Le montant des bons d'achat dépend de la couleur obtenue :

* Si on obtient la couleur "Vert", on gagne un bon d'achat de 50 €
* Si on obtient la couleur "Rouge", on gagne un bon d'achat de 20 €.
* Si on obtient la couleur "Jaune" ou la couleur 'Bleu", on ne gagne pas de bon d'achat.

On appelle X le gain (en €) du joueur.
Recopier et compléter le tableau ci-contre :

Montant X			
Probabilité			

Définition 2

A chaque issue de l'expérience aléatoire précédente, on a associé un nombre (le montant du gain) : on dit que l'on a défini une **variable aléatoire** notée X.

Définition 3

Le tableau obtenu à la question 2) est appelé **la loi de probabilité de X** (c'est un tableau qui donne pour chacune des valeurs de X, la probabilité d'obtenir cette valeur

Définitions 4

Considérons une variable aléatoire X dont la loi de probabilité est donnée par le tableau ci-contre :

Valeurs x_i	x_1	x_2	x_3	…	x_n
Probabilités $p\,(X = x_i)$	p_1	p_2	p_3	…	p_n

* On appelle **espérance de X** (souvent notée $E\,(X)$) le réel défini par : $\boxed{E\,(X) = x_1 \times p_1 + x_2 \times p_2 + ... + x_n \times p_n}$

L'espérance correspond à la moyenne des issues si on répétait une infinité de fois l'expérience aléatoire.

* On appelle **variance de X** (souvent notée $V\,(X)$) le réel défini par : $\boxed{V\,(X) = x_1^2 \times p_1 \times + x_2^2 \times p_2 + ... + x_n^2 \times p_n - E\,(X)^2}$

La variance mesure la dispersion des issues par rapport à l'espérance si on répétait une infinité de fois l'expérience aléatoire.

* **L'écart type de X** (souvent noté $\sigma(X)$) est la racine carrée de la variance $\boxed{\sigma(X) = \sqrt{V\,(X)}}$; il mesure aussi la dispersion des issues par rapport à l'espérance mais s'exprime dans la même unité que les issues et que l'espérance.

3. a. Calculer l'espérance de gain du jeu précédent.

b. Quelle signification peut-on donner à cette valeur ?

4. Calculer la variance et l'écart-type du gain du jeu précédent.

Exercice 2 :

Dans une kermesse, on propose aux joueurs le jeu suivant : on lance un dé à 20 faces parfaitement équilibré.

Si le numéro obtenu est supérieur ou égal à 17, on reçoit 7 €,

Si le numéro obtenu est strictement inférieur à 3, on reçoit 5 €

Sinon on ne reçoit rien.

Le prix pour lancer le dé est fixé à 2 €.

On note X la variable aléatoire égale au gain algébrique du joueur à l'issue d'une partie.

1. Quelles sont les valeurs prises par X ?

2. Déterminer la loi de probabilité de X.

3. a. Calculer l'espérance E (X).

b. Ce jeu est-il favorable au joueur ?

Objectif n° 2 : Probabilités conditionnelles – Arbres pondérés (rappels de 1ère)

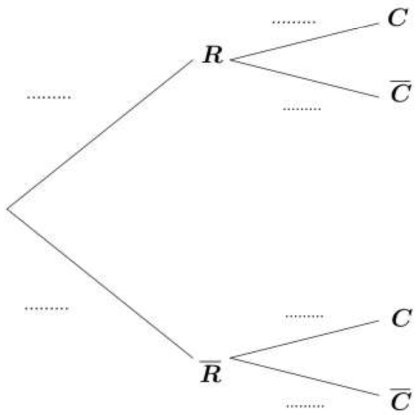
Exercice 3 : une enquête sur l'ensemble des clients d'un garage durant l'année 2021 montre les résultats suivants :

* Information 1 : 60 % des acheteurs potentiels souhaitent que le véhicule soit équipé d'un régulateur de vitesse.
* Information 2 : parmi ceux qui souhaitent un régulateur de vitesse, 80 % souhaitent la climatisation,
* Information 3 : parmi ceux qui ne souhaitent pas de régulateur de vitesse, 30 % ne souhaitent pas non plus la climatisation.

On considère les évènements suivants :

R : " l'acheteur potentiel souhaite un régulateur de vitesse "

C : " l'acheteur potentiel souhaite la climatisation "



1. a. A l'aide des informations de l'énoncé, remplir l'arbre pondéré ci-contre :

b. Sur l'arbre pondéré ci-contre, le nombre 0,6 désigne la probabilité de l'évènement R. On écrit donc $p(R) = 0{,}6$ et donc $p(\overline{R}) =$ ……..

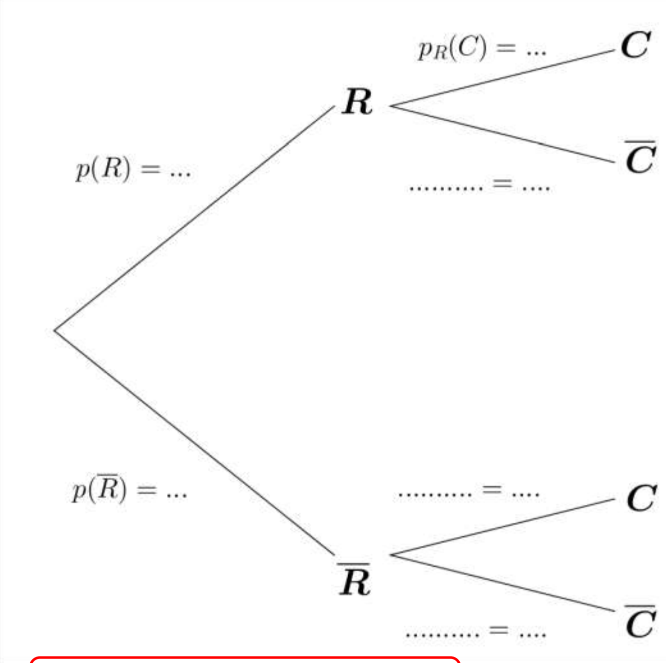
c. Sur l'arbre pondéré ci-contre, le nombre 0,8 désigne la probabilité qu'un client souhaite la climatisation **parmi ceux** qui souhaitent un régulateur de vitesse (on dit aussi la probabilité qu'un client souhaite la climatisation **sachant qu'il** souhaite un régulateur de vitesse).

On appelle cette probabilité une **probabilité conditionnelle** et on la note $p_R(C)$.

On écrit donc $p_R(C) = 0{,}8$.

Compléter :			
	$p_R(\overline{C}) =$ …….	…………… = 0,7	…………… = 0,3

2. On va compléter l'arbre pondéré du 1. en ajoutant les issues. Compléter ce nouvel arbre.



Issues	Probabilités
$R \cap C$	$p(R \cap C) = p(R) \times p_R(C)$ = ...
....	p(............) = ... × .... = ...
....	p(............) = ... × .... = ...
....	p(............) = ... × .... = ...

Construction d'un arbre pondéré

* Sur les branches du 1er niveau, on inscrit les probabilités des évènements correspondants,
* Sur les branches du 2ème niveau, on inscrit des probabilités conditionnelles,
* La somme des probabilités inscrites sur les branches issues d'un même nœud est égale à 1,
* **La probabilité d'une issue** est égale au **produit des probabilités** qui figurent sur les branches qui conduisent à cette issue.

3. On souhaite déterminer la probabilité qu'un acheteur quelconque souhaite la climatisation c'est-à-dire la probabilité $p(C)$.

a. Cette probabilité figure-t-elle dans l'arbre pondéré ?

b. Parmi les issues, quelles sont celles qui conduisent à la réalisation de l'évènement C ?

c. Calculer alors $p(C)$.

Remarque fondamentale : Dans l'arbre pondéré de la question 2, on a obtenu l'égalité : $p(R \cap C) = p_R(C) \times p(R)$

On en déduit immédiatement : $\boxed{p_R(C) = \dfrac{p(R \cap C)}{p(R)}}$. Cette égalité est la définition d'une probabilité conditionnelle. On a donc :

Définition 5

Soient A et B deux événements avec $p(B) \neq 0$.

On note $p_B(A)$ la probabilité de l'événement A sachant que l'événement B est réalisé.

On dit que c'est une **probabilité conditionnelle** et on a $p_B(A) = \dfrac{p(A \cap B)}{p(B)}$

4. Un acheteur souhaite la climatisation. On cherche à connaître la probabilité qu'il ne veule pas de régulateur de vitesse ?

a. Ecrire la probabilité cherchée en écriture mathématiques.

b. Cette probabilité figure-t-elle dans l'arbre pondéré ?

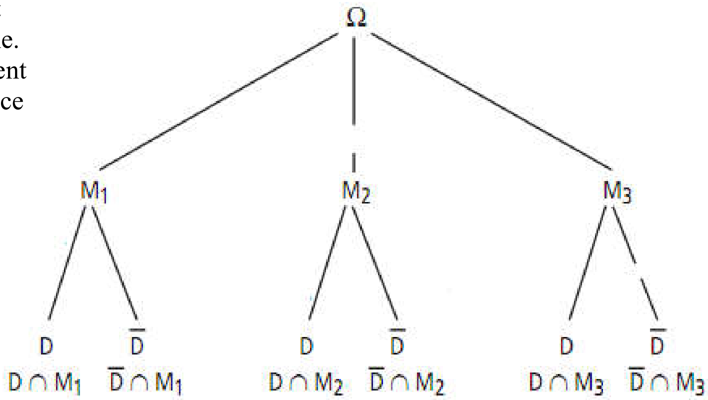
c. En utilisant la définition ci-dessus, déterminer cette probabilité (on donnera la valeur arrondie au centième).

Attention ! il ne faut pas confondre $p(A \cap B)$, $p_A(B)$ et $p_B(A)$. Il faut donc bien savoir reconnaître une probabilité conditionnelle dans un énoncé. Les expressions « **sachant que** ... », « **quand** ... », « **lorsque** ... », « **parmi** ... » sont souvent utilisées pour donner une probabilité conditionnelle. En effet, ces expressions annoncent qu'on ne se place plus dans l'univers tout entier mais seulement dans une partie de celui ci. C'est ce "nouvel" univers qui est alors noté en indice.

Exercice 4 : pour produire des pièces métalliques, un atelier utilise trois machines. Un échantillon de pièces est vérifié par le service qualité. Les résultats sont donnés ci-contre.

Machine	M_1	M_2	M_3
Pièces produites (en % du total)	50	35	15
Fréquence de défaut	0,01	0,02	0,06

On supposera par la suite que les probabilités d'obtenir un défaut sont égales aux fréquences obtenues sur l'échantillon, pour chaque machine. En considérant une pièce choisie au hasard, on appelle M_i l'événement « la pièce a été produite par la machine *i* » et D l'événement « la pièce présente un défaut ».



1. Décrire l'événement $D \cap M_2$.
2. Compléter l'arbre pondéré ci-contre.
3. Calculer la probabilité de l'événement $D \cap M_2$.
4. On tire une pièce au hasard. Le but de cette question est de calculer la probabilité que la pièce tirée soit défectueuse c'est-à-dire qu'on cherche à déterminer $p(D)$
   a. Parmi les issues, quelles sont celles qui réalisent l'évènement D ?
   b. Compléter : $\boldsymbol{p(D) = p(\ldots\ldots\ldots) + p(\ldots\ldots\ldots) + p(\ldots\ldots\ldots)}$
   c. En déduire la valeur de $p(D)$.
5. On tire une deuxième pièce au hasard; elle est défectueuse. Calculer la probabilité qu'elle provienne de la machine 1 (on donnera la valeur arrondie au centième).

La formule vue à la question 4 ($p(D) = p(D \cap M_1) + p(D \cap M_2) + p(D \cap M_3)$) est connue sous le nom de **formule des probabilités totales**.

Elle est vraie dès lors que les évènements M_1, M_2 et M_3 sont tels que leur union réalise la totalité des issues possibles et qu'ils sont deux à deux incompatibles (on dit alors que M_1, M_2 et M_3 forment une partition de l'univers).

Elle se généralise aux cas où la partition contient davantage de 3 évènements et on peut écrire :

Propriété 6 : formule des probabilités totales

Considérons une expérience aléatoire et appelons Ω son univers.
Soit A un évènement quelconque.
Si des événements $M_1, M_2, \ldots, M_n$ forment une partition de Ω (c'est-à-dire qu'ils sont deux à deux incompatibles et que leur réunion est égale à Ω) alors on a :

$$p(A) = p(A \cap M_1) + p(A \cap M_2) + \ldots + p(A \cap M_n)$$

Objectif n° 3 : Répétitions d'évènements indépendants – Loi Binomiale.

Exercice 5 :

Une enquête a été effectuée auprès de deux entreprises A et B. Les résultats sont présentés ci-dessous :

Entreprise A

	Salaire $<$ 2000 €	Salaire $\geqslant$ 2000 €	Total
Femmes	600	200	…..
Hommes	900	300	…..
Total	…..	…..	…..

1. Compléter le tableau à double entrée ci-dessus.

2. On choisit un employé au hasard et on appelle I et F les évènements suivants :

I : l'employé a un salaire inférieur à 2000 €
F : l'employé est une femme.

Donner sous forme de fractions irréductibles :

$p(F) = \ldots\ldots.$	$p(I) = \ldots\ldots.$
$p_F(I) = \ldots\ldots.$	$p_{\overline{F}}(I) = \ldots\ldots.$
$p\ (F \cap I) = \ldots\ldots.$	

3. Compléter par " = " ou " $\neq$ "

$p\ (I)\ \ldots\ldots\ldots\ p_F(I)$ $\qquad$ $p\ (I)\ \ldots\ldots\ldots\ p_{\overline{F}}(I)$

Dans cette entreprise, le fait de savoir que l'employé est une femme ou que l'employé est un homme **n'a pas d'influence** sur le fait qu'il gagne moins de 2000 €.

4. Compléter par " = " ou " $\neq$ " :

$$p\ (F \cap I) \ldots\ldots.\ p\ (F) \times p\ (I)$$

On dit alors que les évènements F et I **sont indépendants**.

Entreprise B

	Salaire $<$ 2000 €	Salaire $\geqslant$ 2000 €	Total
Femmes	500	300	…..
Hommes	800	400	…..
Total	…..	…..	…..

1. Compléter le tableau à double entrée ci-dessus.

2. On choisit un employé au hasard et on appelle I et F les évènements suivants :

I : l'employé a un salaire inférieur à 2000 €
F : l'employé est une femme.

Donner sous forme de fractions irréductibles :

$p(F) = \ldots\ldots.$	$p(I) = \ldots\ldots.$
$p_F(I) = \ldots\ldots.$	$p_{\overline{F}}(I) = \ldots\ldots.$
$p\ (F \cap I) = \ldots\ldots.$	

3. Compléter par " = " ou " $\neq$ "

$p\ (I)\ \ldots\ldots\ldots\ p_F(I)$ $\qquad$ $p\ (I)\ \ldots\ldots\ldots\ p_{\overline{F}}(I)$

Dans cette entreprise, le fait de savoir que l'employé est une femme ou que l'employé est un homme **a de l'influence** sur le fait qu'il gagne moins de 2000 €.

4. Compléter par " = " ou " $\neq$ " :

$$p\ (F \cap I) \ldots\ldots.\ p\ (F) \times p\ (I)$$

On dit alors que les évènements F et I **ne sont pas indépendants**

On en déduit la définition suivante :

Définition et propriété 7

Soient A et B deux événements tels que $p\ (A) \neq 0$ et $p\ (B) \neq 0$.

On dit que A et B sont **indépendants** lorsque la réalisation de l'un ne dépend pas de celle de l'autre, c'est à dire $p_B\ (A) = p\ (A)$ (ou encore $p_A\ (B) = p\ (B)$).

On a : ***A* et *B* indépendants** $\Leftrightarrow p\ (A \cap B) = p\ (A) \times p\ (B)$

Remarque :

Dans cet exercice, c'est le calcul des probabilités qui a permis de démontrer que les évènements I et F étaient indépendants; dans certains cas, l'indépendance peut découler des conditions de l'expérience aléatoire : par exemple, si l'on prélève successivement dans une boîte, avec remise, on obtient des résultats indépendants (ce n'est pas le cas si les tirages se font sans remise).

Exercice 6 :

Un sac contient 5 boules indiscernables au toucher: 2 boules blanches et 3 boules noires.

Partie A : On tire **une boule** de l'urne et on considère les évènements suivants :

S : " on obtient une boule blanche " et E (ou $\overline{S}$) : " on obtient une boule noire"

Déterminer $p = p(S)$ et $q = p(E)$

Définition 8

Cette expérience aléatoire a 2 issues possibles. On l'appelle une "**épreuve de Bernoulli**".

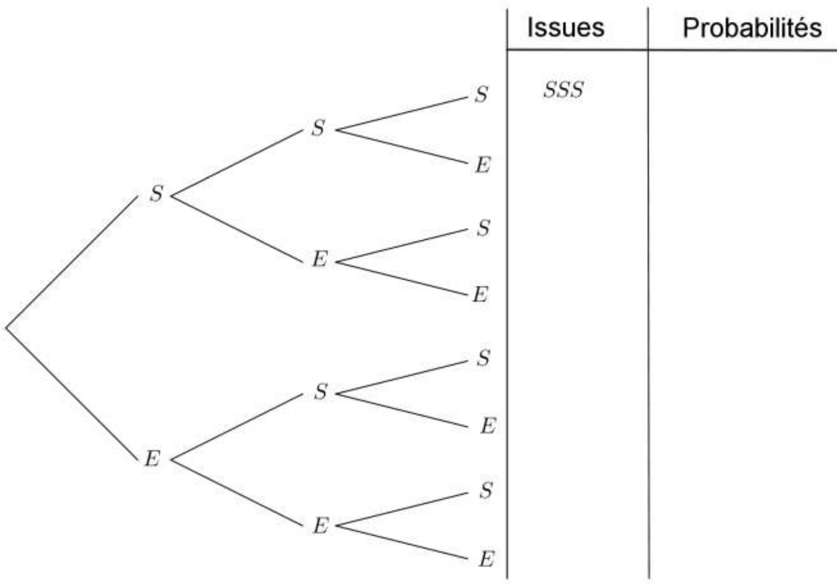
Les 2 issues sont généralement appelées "Succès" (de probabilité p) et "Echec" (de probabilité $1 - p$).

On parle alors d'une épreuve de Bernoulli **de paramètre p.**

Partie B : On va tirer, **successivement**, **avec remise**, 3 boules de cette urne.

1. Expliquer pourquoi la situation peut être assimilée à une répétition de trois épreuves indépendantes.

2. Compléter l'arbre pondéré ci-dessous, illustrant cette situation :



3. On appelle X la variable aléatoire qui donne le nombre de succès obtenus à l'issue des 3 tirages.

a. On s'intéresse à $p(X = 1)$ (c'est –à-dire à la probabilité d'obtenir exactement 1 succès) :

* Combien y a-t-il d'issues conduisant à 1 seul succès ?

* Que pouvez-vous dire de la probabilité de chacune de ces issues ?

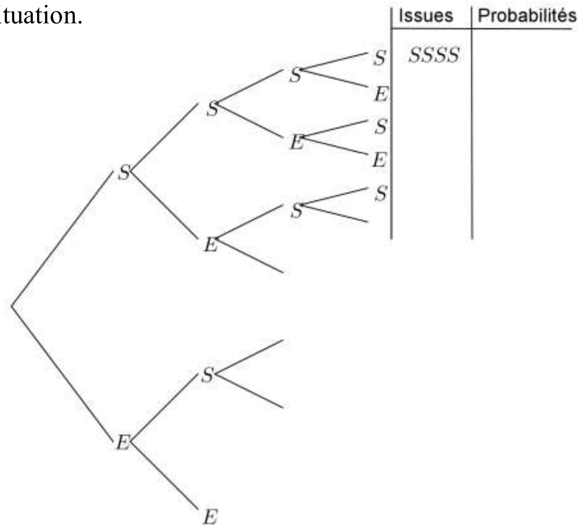
* Compléter alors : $p(X = 1) =$ …….. × ……… ×……..$^{……..}$ = ……….

b. En procédant de même pour les autres valeurs possibles de X, compléter la loi de probabilité de X dans le tableau ci-dessous :

Valeurs possibles pour X				
Probabilités				

Partie C : On va tirer, **successivement**, **avec remise**, 4 boules de cette urne. On peut donc encore considérer qu'il s'agit d'une répétition d'épreuves indépendantes.

4. On donne ci-dessous, le "début" de l'arbre pondéré illustrant cette situation.
Compléter les cinq 1ères issues et calculer leurs probabilités :



5. Comme dans la partie B, on appelle X la variable aléatoire qui donne le nombre de succès obtenus à l'issue des 4 tirages.
Compléter la loi de probabilité de X dans le tableau ci-dessous :

Valeurs possibles pour X					
Probabilités					

Partie D : On va tirer maintenant, **successivement**, **avec remise**, 8 boules de cette urne. On peut donc encore considérer qu'il s'agit d'une répétition d'épreuves indépendantes.

Il devient beaucoup plus fastidieux de construire un arbre pondéré illustrant cette situation.

Comme dans les parties *B* et *C*, on appelle X la variable aléatoire qui donne le nombre de succès obtenus à l'issue des 8 tirages.

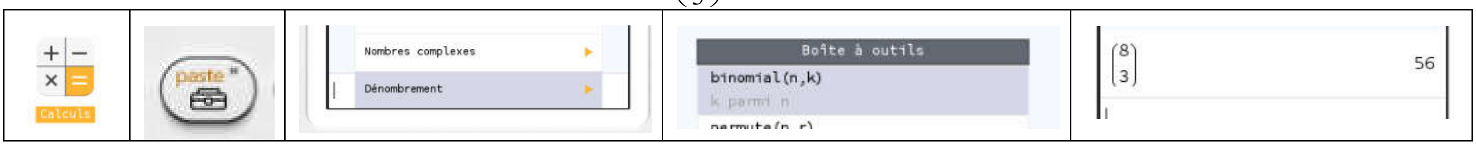
6. Donner l'ensemble Ω des valeurs que peut prendre X : Ω = { ………………………………………… }

7. ***a.*** On voudrait déterminer $p(X=3)$. $p(X=3) = \underbrace{?????????????}_{\text{nombre d'issues contenant 3 } S \text{ sur 8 tirages}} \times \ldots\ldots^{\ldots\ldots} \times \ldots\ldots^{\ldots\ldots}$

Le nombre d'issues contenant 3 "Succès" sur 8 tirages est le nombre de façons de placer 3 éléments (les 3 "Succès") dans 8 "emplacements".

En probabilités, ce nombre s'appelle le nombre de combinaisons de 3 éléments parmi 8 et se note : $\binom{8}{3}$.

On l'appelle un coefficient binomial. Le coefficient binomial $\binom{8}{3}$ peut se déterminer à la calculatrice :



On obtient donc $\binom{8}{3} = 56$ et on en déduit donc : $p(X=3) = 56 \times 0{,}4^3 \times 0{,}6^5 \approx 0{,}279$

b. Calculer de même une valeur approchée au millième de $p(X=6)$

Partie E : Généralisation

De façon plus générale, si l'on effectue **n tirages** (avec remise) et si l'on note X la variable aléatoire qui donne le nombre de succès obtenus à l'issue de ces n tirages, alors :

➔ X prend ses valeurs dans l'ensemble Ω = { .... };

➔ Pour k entier compris entre 0 et n : $p\,(X=k) = \binom{\ldots}{\ldots} \times 0{,}4^{\ldots\ldots} \times 0{,}6^{\ldots\ldots}$

Définitions – Propriétés 9

* On considère une épreuve de Bernoulli. On note p la probabilité du succès.

* On répète n fois cette épreuve dans des conditions d'indépendance (c'est-à-dire que le résulta d'une épreuve n'a pas d'influence sur le résultat des autres).

* La variable aléatoire X qui donne le nombre de succès à l'issue de ces n répétitions suit **la loi binomiale** de paramètres n et p (souvent notée $\mathcal{B}\,(n\,;p)$).

➔ X prend ses valeurs dans l'ensemble $\{0\,;1\,;2\,;\ldots\ldots;n\}$

➔ Pour tout entier $k \in \{0\,;1\,;2\,;\ldots\ldots;n\}$ $\boxed{p\,(X=k) = \binom{n}{k} \times p^{k} \times (1-p)^{n-k}}$

Remarque : certains coefficients binomiaux doivent être connus par cœur :

Propriétés 10

Si n désigne un entier naturel quelconque, alors :

$\binom{n}{0} = \ldots\ldots$ $\binom{n}{1} = \ldots\ldots$ $\binom{n}{n-1} = \ldots\ldots$ $\binom{n}{n} = \ldots\ldots$

On admet les résultats suivants :

Propriétés 11

Si X est une variable aléatoire qui suit la loi binomiale de paramètres n et p alors :

L'espérance de X vaut : $E\,(X) = n \times p$

La variance de X vaut : $V\,(X) = n \times p \times (1-p)$

L'écart-type de X vaut : $\sigma\,(X) = \sqrt{V\,(X)} = \sqrt{n \times p \times (1-p)}$

Exercice 7 :

Considérons l'expérience aléatoire consistant à lancer dix fois, dans les mêmes conditions et de façon indépendante, un dé pipé pour lequel la probabilité d'obtenir 6 est 0,2.

Nommons X la variable aléatoire égale au nombre de 6 obtenus à l'issue de ces 10 lancers.

1. Justifier que X suit une loi binomiale et préciser ses paramètres.

2. Calculer la probabilité d'obtenir 4 fois la face 6. Donner la valeur exacte et donner la valeur approchée à 10^{-3} près.

3. Calculer la probabilité d'obtenir au moins une fois la face 6. Donner la valeur exacte puis la valeur approchée à 10^{-3} près

4. Calculer $E\,(X)$, $V\,(X)$ et $\sigma\,(X)$.

5. Interpréter la valeur obtenue pour $E\,(X)$.

6. Considérons dans cette question que le joueur lance non pas dix fois mais ***n* fois le dé**, n étant un entier naturel non nul.

Nommons X_n la variable aléatoire égale au nombre de 6 obtenus à l'issue de ces n lancers. Nommons p_n la probabilité d'obtenir au moins une fois la face 6.

a. Justifier l'égalité : $p_n = 1 - 0{,}8^n$.

b. Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} p_n$. Interpréter le résultat obtenu dans le contexte de l'exercice.

Exercice 8 : Utilisation de la calculatrice Numworks pour calculer des probabilités avec la loi binomiale.

On a déjà vu que la calculatrice Numworks permet de calcule des coefficients binomiaux.

Elle permet aussi de calculer divers types de probabilités.

On considère une variable aléatoire X suivant la loi binomiale de paramètres $n = 9$ et $p = 0{,}8$

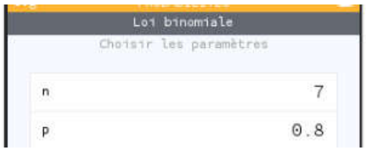
On cherche à déterminer une valeur approchée à 10^{-3} près des probabilités suivantes :

1. $p(X=3)$ ***2.*** $p(X=5)$ ***3.*** $p(X \leqslant 4)$ ***4.*** $p(X \geqslant 5)$ ***5.*** $p(1 \leqslant X \leqslant 4)$ ***6.*** $p(X<3)$ ***7.*** $p(X>6)$

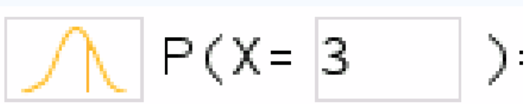
Menu Probabilités

Choisir "Binomiale"

Rentrer les paramètres



Cliquer sur l'icône  pour sélectionner celle concernant la probabilité cherchée

1. Pour $p(X=3)$: sélectionner 

Donc $p(X=3) \approx$ …………..

2. $p(X=5) \approx$ …………..

3. $p(X \leqslant 4) \approx$ …………..

4. $p(X \geqslant 5) \approx$ …………..

5. $p(1 \leqslant X \leqslant 4) \approx$ …………..

6. $p(X<3) \approx$ …………..

7. $p(X>6) \approx$ …………..

Exercice 9 :

Un serveur a étudié les pourboires laissés par ses clients durant l'année écoulée. Il a constaté que 25 % des clients ne laissent pas de pourboires et que les autres laissent un pourboire moyen de 1,80 €.

On prélève au hasard un échantillon de 50 clients de ce restaurant. On suppose que les paiements des clients sont indépendants les uns des autres.

On note X la variable aléatoire qui compte le nombre de clients ayant laissé un pourboire.

Les résultats des probabilités seront arrondis au millième.

1. Justifier que X suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.

2. Déterminer et interpréter $p(X=35)$

3. Déterminer la probabilité de l'évènement suivant : " avec ces 50 clients, le serveur a reçu 72 € de pourboire".

4. Déterminer $p(35 \leqslant X \leqslant 40)$. Interpréter le résultat obtenu.

Exercice 10 :

L'angine chez l'être humain est provoquée soit par une bactérie (angine bactérienne), soit par un virus (angine virale). On admet qu'un malade ne peut pas être porteur à la fois du virus et de la bactérie.

L'angine est bactérienne dans 20 % des cas.

Pour déterminer si une angine est bactérienne, on dispose d'un test. Le résultat du test peut être positif ou négatif.

Le test est conçu pour être positif lorsque l'angine est bactérienne, mais il présente des risques d'erreur :

* si l'angine est bactérienne, le test est négatif dans 30% des cas,
* si l'angine est virale, le test est positif dans 10% des cas.

On choisit au hasard un malade atteint d'angine. On note les évènements suivants :

* B : " l'angine du malade est bactérienne",
* T : " le test effectué sur le malade est positif".

1. ***a.*** Recopier et compléter à l'aide des données de l'énoncé :

$p(B) = \ldots\ldots\ldots$	$p_{\ldots}(\ldots) = 0,3$	$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = 0,1$

b. Représenter la situation par un arbre de probabilités.

2. ***a.*** Quelle est la probabilité que l'angine du malade soit bactérienne et que le test soit positif.

b. Montrer que la probabilité que le test soit positif est égale à 0,22.

c. Un malade est choisi au hasard par mi ceux qui ont un test positif. Quelle est la probabilité pour que son angine soit bactérienne?

3. On choisit au hasard cinq malades atteints d'une angine.
On note X la variable aléatoire qui compte, parmi les cinq malades choisis, le nombre de malade dont le test est positif.

On suppose que le nombre de malades est suffisamment important pour que l'on puisse assimiler ce choix à un tirage avec remise,

a. Quelle est la loi suivie par X ? Préciser ses paramètres.

b. Calculer la probabilité que, parmi ces 5 malades, il y en ait exactement 2 avec un test positif (vous détaillerez le calcul et vous donnerez l'arrondi au centième)

c. Calculer la probabilité que, parmi ces 5 malades, il y en ait au moins un avec un test positif (vous donnerez <u>la valeur exacte</u> puis l'arrondi au centième).

d. Calculer l'espérance mathématique de X.

Exercice 11 :

Hugo et Aya jouent à Pile ou Face avec une pièce de monnaie.

Au bout de plusieurs parties, lassé de perdre, Hugo prétend que la pièce n'est pas équilibrée et que la probabilité d'obtenir "Face" n'est pas égale à 0,5.

Pour vérifier cette affirmation, Hugo et Aya ont une idée. Ils décident de lancer 100 fois la pièce de monnaie et de compter le nombre de fois où ils obtiennent "Face".

Partie A : loi de probabilité théorique de la pièce.

1. On suppose que la pièce est équilibrée. On note X la variable qui donne le nombre d'apparition de "Face" sur 100 lancers d'une pièce équilibrée.

a. Quelle est la loi de probabilité de X ? Quels sont ses paramètres ?

b. Quelle est l'espérance de X ? Quelle interprétation pouvez-vous donner de ce résultat dans le contexte de l'exercice ?

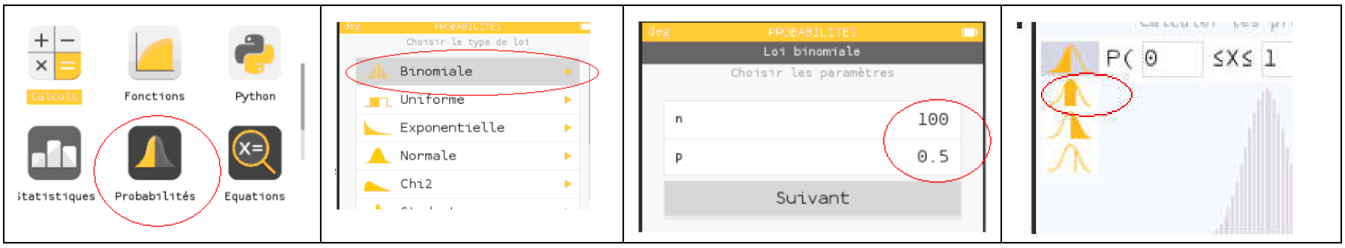
Hugo et Aya lancent leur dé 100 fois. Sur les 100 lancers, ils obtiennent 42 fois "Face".

Ce résultat est "en-dessous" de la moyenne trouvée à la question 1. *b.*
On va aider Hugo et Aya à savoir si ce résultat est dû au fait que la pièce est truquée ou alors s'il s'agit d'un résultat "normal".

Partie B : à la recherche d'un intervalle.

On se propose de déterminer un intervalle I de la forme $I = [\, 50 - m\,;\, 50 + m\,]$ tel que $p(X \in I) \geqslant 0{,}95$ (l'intervalle cherché est centré en 50 car 50 correspond à l'espérance de X).

2. A l'aide de la calculatrice :



déterminer la plus petite valeur de m pour laquelle $p(50 - m \leqslant X \leqslant 50 + m) \geqslant 0{,}95$

3. Compléter : " *Dans plus de 95% des échantillons de 100 lancers, le nombre d'apparitions de "Face" est compris entre ...... et ......* "

4. Le nombre de "Face" obtenu par Hugo et Aya appartient-il à cet intervalle ?

Comme 42 est compris entre 40 et 60, **on n'a pas de raison de douter** du fait que la pièce soit équilibrée.
On dit que : " **Au seuil de confiance de 95%, on peut accepter l'hypothèse que la pièce est bien équilibrée "**
(ou encore que : " on peut accepter l'hypothèse que la pièce est bien équilibrée avec un risque d'erreur de moins de 5 % ")

Remarque : le choix initial de 0,95 est arbitraire, on aurait pu choisir un autre réel (compris entre 0 et 1). En pratique, on choisit souvent 0,95 car cela donne une marge d'erreur assez faible (inférieure à 5 %) tout en donnant un intervalle relativement "resserré" .

Exercice 12 :

Dans la bande annonce du dernier "Avengers", il est indiqué " *le taux de satisfaction des spectateurs est de 92 %* ".

Un critique de film souhaite vérifier la véracité de cette affirmation. Pour cela il décide d'interroger un échantillon de 200 personnes prises au hasard parmi celles ayant déjà vu le film.

On suppose que les réponses de ces 200 personnes sont indépendantes les unes des autres.

Si le taux de satisfaction est bien égal à 92 %, on peut supposer que la variable aléatoire X qui donne le nombre de spectateurs satisfaits par le film dans cet échantillon suit une loi binomiale.

1. ***a.*** Préciser les paramètres de cette loi binomiale.

b. Déterminer l'espérance $E(X)$ de cette loi binomiale

2. ***a.*** A la calculatrice, déterminer un intervalle $[a\,;b]$ centré en $E(X)$ tels que $p(a \leqslant X \leqslant b) \geqslant 0{,}95$ et que $b-a$ soit le plus petit possible (Aide : voir exercice 11 Partie B)

b. Le résultat du sondage indique que 173 personnes ont apprécié le film. Peut-on remettre en cause le taux de satisfaction présenté dans la bande annonce ? Justifier.

Remarque :

Dans cet exercice, si le taux de satisfaction est bien de 92 %, cela signifie que dans un échantillon de 200 personnes, il y plus de 95 % de chance que le nombre de personnes satisfaites soit compris entre 175 et 190 environ.

Or, dans l'échantillon interrogé, il y a moins de personnes que ce qu'on pouvait espérer. C'est pour cela qu'on a des raisons de douter de l'affirmation " *le taux de satisfaction des spectateurs est de 92 %* ".

Mais cela ne signifie pas forcément que cette affirmation est fausse. **On peut simplement dire qu'on peut douter de cette affirmation "avec un seuil de confiance d'au moins 95%" (ou " avec moins de 5% de risque de se tromper").**

Objectif n° 4 : Loi géométrique

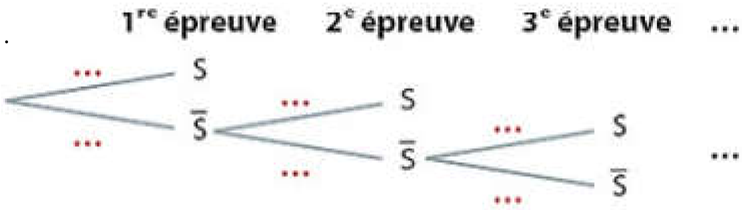
Exercice 13 :

On lance un dé équilibré plusieurs fois jusqu'à ce qu'on obtienne le 6 pour la 1ère fois.
On considère pour cela l'épreuve de Bernoulli : " on lance un dé " ; son succès S est " on obtient le numéro 6" ;

On répète cette épreuve de Bernoulli autant de fois que nécessaire.

1. Quelle est la probabilité p du succès dans cette épreuve de Bernoulli.

2. L'arbre pondéré ci-contre illustre cette situation : compléter le .



3. On note X la variable aléatoire qui donne le nombre de lancers nécessaires pour obtenir le 6 pour la 1ère fois.

a. Quelles sont les valeurs prises par X ?

b. En utilisant l'arbre pondéré de la question 1, déterminer :

* $p(X = 1)$ * $p(X = 2)$ * $p(X = 3)$

c. Soit k un entier supérieur ou égale à 1. Exprimer $p(X = k)$ en fonction de k

Définitions – Propriétés 12

* On considère une épreuve de Bernoulli. On note <u>p la probabilité du succès</u>.

* On répète cette épreuve de Bernoulli dans des conditions d'indépendance jusqu'à obtenir le 1er succès.

* On considère la variable aléatoire X qui compte le nombre d'épreuves nécessaires pour avoir le 1er succès. On dit que X suit **la loi géométrique** de paramètre p.

➔ X prend ses valeurs dans l'ensemble $\{ 1 ; 2 ; 3 ; \ldots \}$

➔ Pour tout entier $k \geqslant 1$: $\boxed{p(X = k) = (1-p)^{k-1} \times p}$

Propriétés 13 (admises)

Soit X une variable aléatoire qui suit la loi géométrique de paramètre p :

* alors l'espérance de X vaut : $E(X) = \dfrac{1}{p}$

* Pour tout entier naturel $n \geqslant 1$: $p(X > n) = (1-p)^n$ (et donc : $p(X \leqslant n) = 1 - (1-p)^n$)

4. Déterminer $E(X)$ **.** Interpréter le résultat obtenu dans le contexte de l'exercice.

5. Déterminer $p(X > 4)$ **.**

6. Déterminer $p_{X>3}(X > 4+3)$. Comparer avec $p(X > 4)$

<u>Remarque :</u> La question 6 montre que devoir attendre plus de 4 épreuves avant d'obtenir un succès a la même probabilité que l'on parte de la 1ère épreuve ou que l'on parte de la 3ème épreuve sachant que l'on a pas obtenu de succès pour ces 3 premières épreuves.

Ce résultat se généralise à toutes les lois géométriques (on dit que les lois géométriques sont **des lois sans mémoire**) et on obtient la propriété suivante :

Propriété 14

Soit X une variable aléatoire qui suit la loi géométrique de paramètre p .

Pour tous entiers naturels $n \geqslant 1$ et $k \geqslant 1$, $p_{X>n}(X > n+k) = p(X > k)$

<u>*Remarque*</u> : les formules précédentes permettant de calculer $p(X=k)$ ou $p(X>n)$ ou l'espérance $E(X)$ pour une variable aléatoire suivant une loi géométrique de paramètre p sont à connaître par cœur et doivent être utilisées dans les exercices.

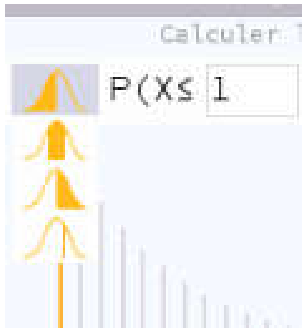
Il est toutefois possible de vérifier les résultats obtenus à l'aide de la calculatrice

Menu Probabilités

Choisir "Géométrique"

Rentrer le paramètre p

Cliquer sur l'icône souhaitée pour calculer la probabilité cherchée



<u>Exercice 14 :</u>

Un couple a recours à des Fécondations In Vitro (FIV) pour avoir un enfant. Le taux moyen de succès d'une FIV est de 25 % environ. Au-delà de 4 tentatives, les FIV ne sont plus remboursées par la Sécurité Sociale. On note X le nombre de tentatives de FIV nécessaires pour avoir un enfant. Les résultats seront arrondis au millième.

1. Quelle est loi suivie par X ? Quel est son paramètre ?

2. Quelle est la probabilité pour un couple de devoir faire plus de trois FIV pour avoir un enfant ?

3. Quelle est la probabilité pour un couple d'avoir un enfant grâce à la FIV en étant remboursé par la Sécurité Sociale.?

4. Un couple a déjà tenté trois FIV sans avoir eu d'enfants. Quelle est la probabilité qu'il leur faille au moins six FIV pour avoir un enfant ?

<u>Exercice 15 :</u>

Un vacancier a prévu de faire 6 jours de randonnée dans les Alpes dans l'espoir de voir des chamois. Chaque jour, il estime que la probabilité d'en rencontrer est de 0,15.

Les résultats seront arrondis au millième.

1. Quelle est la probabilité que ce vacancier voit des chamois pour la 1$^{\text{ère}}$ fois le 4$^{\text{ème}}$ jour ?

2. Quelle est la probabilité qu'il rencontre des chamois au cours de son séjour ?

3. Combien de jours devrait-il rester en montagne pour avoir plus de 90 % de chance de voir des chamois ?

<u>Exercice 16 :</u>

Un automobiliste roule sur une avenue sur laquelle se trouvent 15 feux tricolores. On suppose que la probabilité qu'un feu soit vert lorsqu'il se présente est de 0,4 et que les feux ne sont pas synchronisés.

X est la variable aléatoire qui donne le numéro du 1$^{\text{er}}$ feu rouge ou orange rencontré.

Arrondir les résultats au millionième.

1. Quelle est la loi suivie par X ? Justifier

2. Quelle est la probabilité que l'automobiliste rencontre les 5 premiers feux au vert ?

3. Quelle est la probabilité que l'automobiliste ne rencontre aucun feu rouge ou orange sur cette avenue ?

4. L'automobiliste a passé les 10 premiers feux au vert. Quelle est la probabilité qu'il passe les prochains feux au vert également ?