Maths Complémentaires - CH3 - Correction

Exercice 1

Partie A

1) a)

x	0	1	5	10	100	1 000	10^5	10^{10}
$f(x)$	0	1	25	100	10000	1000000	10^{10}	10^{20}

b) pour que $x^2 > 10^{100}$, il "suffit" de prendre $x > 10^{50}$

c) pour que $x^2 > 10^{1000}$, il "suffit" de prendre $x > 10^{500}$

$$\boxed{\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty}$$

2)

x	0	-1	-5	-10	$-1\,000$	-10^5	-10^{10}	-10^{50}
$f(x)$	0	1	25	100	1000000	10^{10}	10^{20}	10^{100}

$$\boxed{\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty}$$

Partie B

3) a)

$\lim_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$	$\lim_{x \to -\infty} g(x) = -\infty$
$\lim_{x \to +\infty} h(x) = +\infty$	$\lim_{x \to -\infty} h(x) = 0$
$\lim_{x \to +\infty} i(x) = +\infty$	

b) $i(x) = \sqrt{x}$ n'existe que pour $x \geq 0$

Donc la limite de $i(x)$ lorsque x tend vers $-\infty$ n'a pas de sens.

Exercice 2

Partie A

1) a)

x	1	4	8	10	100	1 000	100 000
$f(x)$	1	0,25	0,125	0,1	0,01	0,001	0,00001

$\boxed{\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0}$

2) a)

x	– 1	– 4	– 8	– 10	– 100	– 1 000	– 100 000
$f(x)$	-1	-0,25	-0,125	-0,1	-0,01	-0,001	-0,00001

A la lecture de ce tableau, on peut écrire : $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$

b) L'axe des abscisses est une asymptote horizontale à Cf au voisinage de $-\infty$

Propriétés 1 : limites en l'infini des fonctions de référence

* $\lim\limits_{x \to +\infty} x^2 = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} x^2 = +\infty$	* $\lim\limits_{x \to +\infty} x^3 = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} x^3 = -\infty$
* $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$	* $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x} = +\infty$
* $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{1}{x} = 0$	

<u>*Remarque*</u> : on a aussi de façon évidente :

* Si k désigne un réel <u>strictement positif</u> : $\lim\limits_{x \to +\infty} kx = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} kx = -\infty$

* Si k désigne un réel <u>strictement négatif</u> : $\lim\limits_{x \to +\infty} kx = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} kx = +\infty$

Exercice 3

Partie A

1) $\boxed{\lim_{x \to -\infty} f(x) = 2 \quad \text{et} \quad \lim_{x \to +\infty} f(x) = -3}$

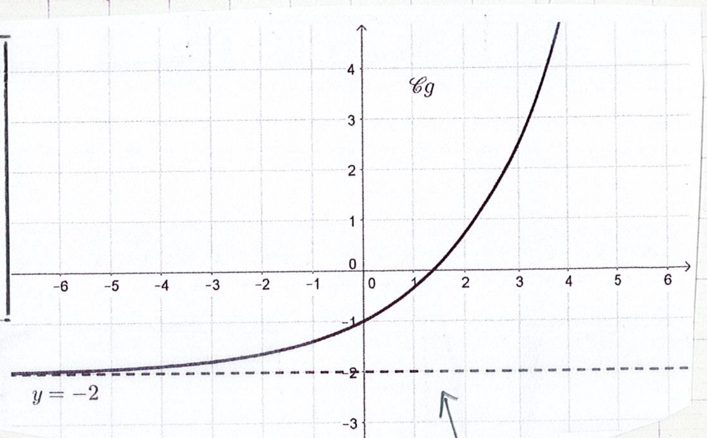
2)

x	$-\infty$	$+\infty$
Variations de f	2 ↘	-3

Partie B

3) 4)

$\boxed{\cdot \lim_{x \to -\infty} g(x) = -2}$ donc la droite d'équation $y = -2$ est asymptote horizontale à C_g en $-\infty$



$\boxed{\cdot \lim_{x \to +\infty} g(x) = +\infty}$ (pas d'interprétation graphique)

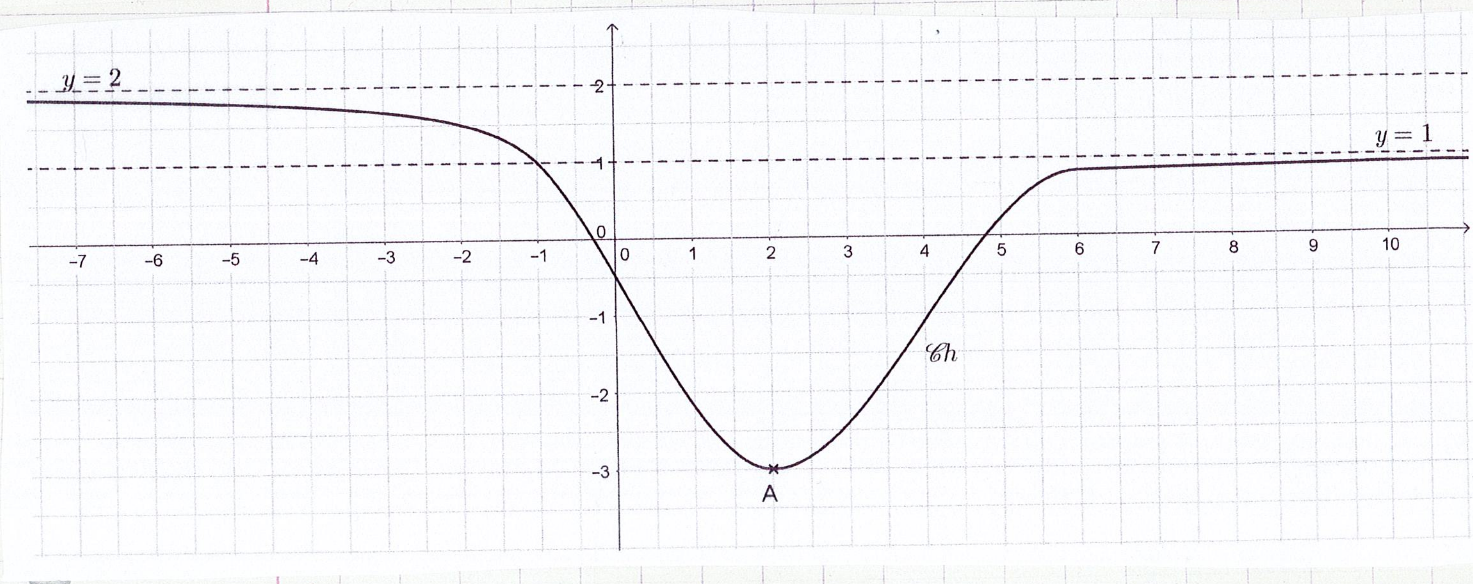
5) une courbe possible

Partie C

6) 7)

- $\lim_{x \to -\infty} h(x) = 2$ donc la droite d'équation $y = 2$ est asymptote horizontale à C_h en $-\infty$.
- $\lim_{x \to +\infty} h(x) = 1$ donc la droite d'équation $y = 1$ est asymptote horizontale à C_h en $+\infty$

8)



Exercice 4

Partie A

1) $0^2 = 0$ "$\frac{1}{0}$" n'existe pas

$\boxed{\text{Donc } 0 \text{ n'a pas d'image par } f}$

2)

x	2	1	0,5	0,1	0,001	10^{-4}	10^{-10}
$f(x)$	0,25	1	4	100	1000000	10^8	10^{20}

x	− 2	− 1	− 0,5	− 0,1	− 0,001	-10^{-4}	-10^{-10}
$f(x)$	0,25	1	4	100	1000000	10^8	10^{20}.

Il semble donc que, lorsque x " tend vers 0 ", alors $f(x)$ tend vers ....$+\infty$.... .

On peut donc écrire : $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = +\infty$

Partie B

3)

a.

x	2	1	0,1	0,01	10^{-10}
$g(x)$	0,5	1	10	100	10^{10}

Lorsque x tend vers 0 <u>en restant positif</u>, alors $g(x)$ tend vers ...$+\infty$.... .

On écrit alors : $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} g(x) = +\infty$

b.

x	− 2	− 1	− 0,1	− 0,01	-10^{-10}
$g(x)$	−0,5	−1	−10	−100	-10^{10}

Lorsque x tend vers 0 <u>en restant négatif</u>, alors $g(x)$ tend vers ....$-\infty$.... .

On écrit alors : $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} g(x) = -\infty$

Propriétés 3 : fonction de référence de limites infinies en un réel

* $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$

* $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{1}{x} = +\infty$

* $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \frac{1}{x} = -\infty$

5/20

Exercice 5

Partie A

1)

2)

- $\lim\limits_{x \to -4} f(x) = -\infty$ donc la droite d'équation $x=-4$ est asymptote verticale à $\mathcal{C}_f$

- $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = +\infty$ donc la droite d'équation $x=2$ est asymptote verticale à $\mathcal{C}_f$.

3) Voir ci-dessous

Partie B

4) 5) $\lim\limits_{x \to 5} g(x) = +\infty$ donc la droite d'équation $x=5$ est asymptote verticale à $\mathcal{C}_g$

6) Voir ci-dessous

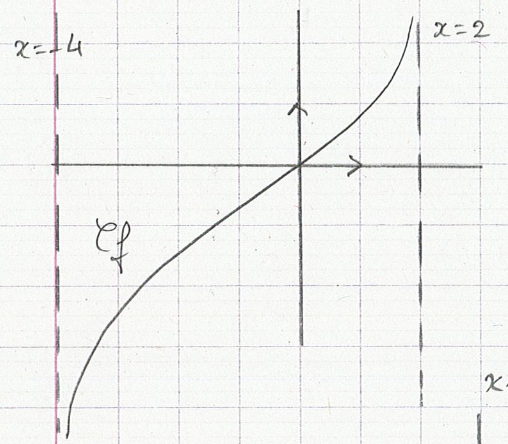
Partie C

7)

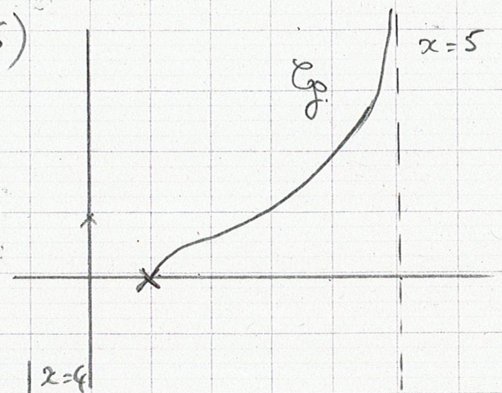
- $\lim\limits_{x \to 1} h(x) = +\infty$ donc la droite d'équation $x=1$ est asymptote verticale à $\mathcal{C}_h$

- $\lim\limits_{x \to 4} h(x) = -\infty$ donc la droite d'équation $x=4$ est asymptote verticale à $\mathcal{C}_h$.

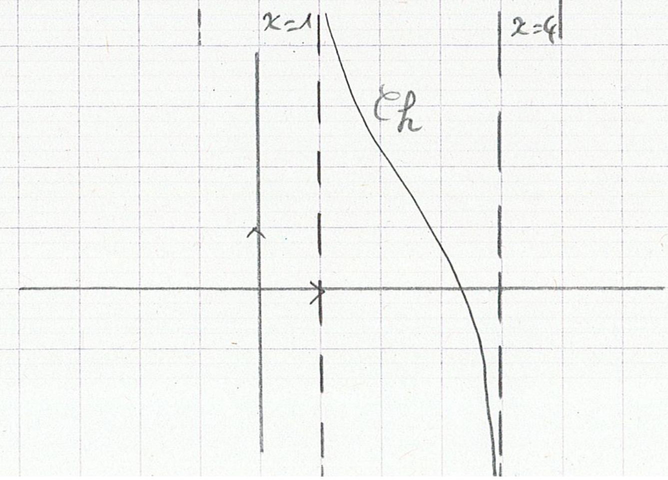
3)



6)



8)



Exercice 6

6/20

Partie A

1) a) $\boxed{\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty \text{ et } \lim_{x \to +\infty} g(x) = +\infty.}$

b) $f(x) - g(x) = x^2 + 3x + 5 - (x^2 - 1) = 3x + 6$

$\boxed{f(x) - g(x) = 3x + 6 \quad \text{donc} \lim_{x \to +\infty} f(x) - g(x) = +\infty}$

c) $\boxed{\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty \; ; \lim_{x \to +\infty} g(x) = +\infty \; ; \lim_{x \to +\infty} f(x) - g(x) = +\infty}$

2) a) b) c) On vérifie que $\boxed{\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty \quad \lim g(x) = +\infty \quad \lim_{x \to +\infty} f(x) - g(x) = -\infty}$

et $f(x) - g(x) = 2 - x$

3) a) b) c) On vérifie que $\boxed{\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty \quad \lim_{x \to +\infty} g(x) = +\infty \quad \lim_{x \to +\infty} f(x) - g(x) = -5}$

et $f(x) - g(x) = -5$

Partie B

4) $f(x) = 3x^3 - 4x^2$

a) $\lim_{x \to +\infty} 3x^3 = +\infty$ et $\lim_{x \to +\infty} 4x^2 = +\infty$.

$\boxed{\text{Donc F.I. du type } \text{"}\infty - \infty\text{"}}$

b) $f(x) = 3x^3 - 4x^2 = x^3 \left(\frac{3x^3}{x^3} - \frac{4x^2}{x^3} \right) = x^3 \left(3 - \frac{4}{x} \right)$

c) $\left.\begin{array}{l} \lim_{x \to +\infty} x^3 = +\infty \\ \lim_{x \to +\infty} 3 - \frac{4}{x} = 3 \end{array}\right\}$ Donc par produit $\lim_{x \to +\infty} x^3 \left(3 - \frac{4}{x}\right) = +\infty$

$\boxed{\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty}$

5) a) $g(x) = -2x^3 + 3x^2 - 1 = x^3\left(\frac{-2x^3}{x^3} + \frac{3x^2}{x^3} - \frac{1}{x^3}\right)$

$g(x) = x^3\left(-2 + \frac{3}{x} - \frac{1}{x^3}\right)$

$$\left.\begin{array}{l}\lim_{x \to +\infty} x^3 = +\infty \\ \lim_{x \to +\infty} -2 + \frac{3}{x} - \frac{1}{x^3} = -2\end{array}\right\} \text{Par produit } \boxed{\lim_{x \to +\infty} g(x) = -\infty}$$

De même, comme $\lim_{x \to -\infty} x^3 = -\infty$ $\boxed{\lim_{x \to -\infty} g(x) = +\infty}$

b) $h(x) = x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = x^4\left(1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} + \frac{1}{x^4}\right)$

$$\left.\begin{array}{l}\lim_{x \to +\infty} x^4 = +\infty \\ \lim_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} + \frac{1}{x^4}\right) = 1\end{array}\right\} \text{Par produit } \boxed{\lim_{x \to +\infty} h(x) = +\infty}$$

De même comme $\lim_{x \to -\infty} x^4 = +\infty$ $\boxed{\lim_{x \to -\infty} h(x) = +\infty}$

6) a) • $\lim_{x \to -\infty} f_1(x) = \lim_{x \to -\infty} -3x^5 = +\infty$ $\boxed{\lim_{x \to -\infty} f_1(x) = +\infty}$

• $\lim_{x \to -\infty} f_2(x) = \lim_{x \to -\infty} x^7 = -\infty$ $\boxed{\lim_{x \to -\infty} f_2(x) = -\infty}$

• $\lim_{x \to -\infty} f_3(x) = \lim_{x \to -\infty} 4x^2 = +\infty$ $\boxed{\lim_{x \to -\infty} f_3(x) = +\infty}$

• $\lim_{x \to -\infty} f_4(x) = \lim_{x \to -\infty} -2x^4 = -\infty$ $\boxed{\lim_{x \to -\infty} f_4(x) = -\infty}$

Exercice 7

Partie A

1) a) $\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x\to+\infty} g(x) = 0}$

b) $f(x) \times g(x) = 3x^2 \times \frac{5}{x} = \frac{15x^2}{x} = 15x$

$\boxed{f(x) \times g(x) = 15x \quad \text{donc} \quad \lim_{x\to+\infty} f(x) \times g(x) = +\infty}$

c) $\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \; ; \; \lim_{x\to+\infty} g(x) = 0 \; , \; \lim_{x\to+\infty} f(x) \times g(x) = +\infty}$

2) a) On vérifie que

b)

c) $f(x) \times g(x) = \frac{-14}{x}$

$\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x\to+\infty} g(x) = 0 \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x) \times g(x) = 0}$

3) a) On vérifie que

b)

c) $f(x) \times g(x) = 3$

$\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x\to+\infty} g(x) = 0 \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x) \times g(x) = 3}$

Partie B

4) a) $\lim_{x\to+\infty} \frac{5}{2x} = 0$ et $\lim_{x\to+\infty} (6x^3 + 4) = +\infty$

$\boxed{\text{Donc F.I. du type "} 0 \times \infty \text{"}}$

b) $f(x) = \frac{5}{2x}(6x^3 + 4) = \frac{30x^3}{2x} + \frac{20}{2x} = 15x^2 + \frac{10}{x}$

$\left.\begin{array}{l} \lim_{x\to+\infty} 15x^2 = +\infty \\ \lim_{x\to+\infty} \frac{10}{x} = 0 \end{array}\right\}$ Donc par somme

$\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty}$

Exercice 8

9/20

Partie A

1) a) $\boxed{\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \to +\infty} g(x) = +\infty}$

b) $\dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{3x^2}{2x} = \dfrac{3x}{2}$

$\boxed{\dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{3x}{2} \quad \text{donc} \quad \lim_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = +\infty}$

c) $\boxed{\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty \; ; \; \lim_{x \to +\infty} g(x) = +\infty \; , \; \lim_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = +\infty}$

2) a)
b)
c)

On vérifie que $\boxed{\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty \quad \lim_{x \to +\infty} g(x) = +\infty \quad \lim_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 0}$

$\dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{6x}{3x^3} = \dfrac{2}{x^2}$

3) a)
b)
c)

On vérifie que $\boxed{\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty \quad \lim_{x \to +\infty} g(x) = +\infty \quad \text{donc} \quad \lim_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 5}$

$\dfrac{f(x)}{g(x)} = 5$

Partie B

4) a) $\lim_{x \to +\infty} 4x - 1 = +\infty$ et $\lim_{x \to +\infty} 2x + 3 = +\infty$

Donc $\boxed{\text{F.I du type } \dfrac{\infty}{\infty}}$

b) $f(x) = \dfrac{4x-1}{2x+3} = \dfrac{x\left(4 - \frac{1}{x}\right)}{x\left(2 + \frac{3}{x}\right)}$ $\quad \boxed{f(x) = \dfrac{4 - \frac{1}{x}}{2 + \frac{3}{x}}}$

c) $\left.\begin{array}{l} \lim_{x \to +\infty} 4 - \dfrac{1}{x} = 4 \\ \lim_{x \to +\infty} 2 + \dfrac{3}{x} = 2 \end{array}\right\}$ donc par quotient.

$\boxed{\lim_{x \to +\infty} f(x) = \dfrac{4}{2} = 2}$

10/20

5) a) $g(x) = \dfrac{x^3-1}{2x^2+1} = \dfrac{x^3\left(1-\frac{1}{x^3}\right)}{x^2\left(2+\frac{1}{x^2}\right)} = \dfrac{x\left(1-\frac{1}{x^3}\right)}{2+\frac{1}{x^2}}$

* • $\lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty} 1-\frac{1}{x^3} = 1$ } donc par produit $\lim\limits_{x\to+\infty} x\left(1-\frac{1}{x^3}\right) = +\infty$

• $\lim\limits_{x\to+\infty} x\left(1-\frac{1}{x^3}\right) = +\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty} 2+\frac{1}{x^2} = 2$ } Donc par quotient $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty}$

* Par un raisonnement analogue $\boxed{\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = -\infty}$

b) $h(x) = \dfrac{3x^3+5x+1}{5x^4+7} = \dfrac{x^3\left(3+\frac{5}{x^2}+\frac{1}{x^3}\right)}{x^4\left(5+\frac{7}{x^4}\right)} = \dfrac{3+\frac{5}{x^2}+\frac{1}{x^3}}{x\left(5+\frac{7}{x^4}\right)}$

* • $\lim\limits_{x\to+\infty} 3+\frac{5}{x^2}+\frac{1}{x^3} = 3$; $\lim\limits_{x\to+\infty} x\left(5+\frac{7}{x^4}\right) = +\infty$ } Donc par quotient $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = 0}$

* Par un raisonnement analogue $\boxed{\lim\limits_{x\to-\infty} h(x) = 0}$

6) a). $\lim\limits_{x\to+\infty} f_1(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{-3x^5}{x^2} = \lim\limits_{x\to+\infty} -3x^3 = -\infty$ | $\lim\limits_{x\to+\infty} f_1(x) = -\infty$

. $\lim\limits_{x\to+\infty} f_2(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^4}{x^7} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x^3} = 0$ | $\lim\limits_{x\to+\infty} f_2(x) = 0$

. $\lim\limits_{x\to+\infty} f_3(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{4x^2}{5x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{4x}{5} = +\infty$ | $\lim\limits_{x\to+\infty} f_3(x) = +\infty$

. $\lim\limits_{x\to+\infty} f_4(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{-2x^4}{3x^4} = -\dfrac{2}{3}$ | $\lim\limits_{x\to+\infty} f_4(x) = -\dfrac{2}{3}$

Exercice 9

1) a) $\boxed{\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x \to +\infty} g(x) = 0}$

b) $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\frac{4}{x}}{\frac{2}{x}} = \frac{4}{x} \times \frac{x}{2} = 2.$

$\boxed{\frac{f(x)}{g(x)} = 2 \quad \text{donc} \quad \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 2}$

c) $\boxed{\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0 \quad \lim_{x \to +\infty} g(x) = 0 \quad \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 2}$

2) a)
b)
c)

On vérifie que

$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{4x}{3}$ donc

$\boxed{\begin{array}{l} \lim_{x \to +\infty} f(x) = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x \to +\infty} g(x) = 0 \\ \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = +\infty \end{array}}$

3) a)
b)
c)

On vérifie que

$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{4}{5x^2}$ donc

$\boxed{\begin{array}{l} \lim_{x \to +\infty} f(x) = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x \to +\infty} g(x) = 0 \\ \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 0 \end{array}}$

Exercice 10

On a vu, lors des quatre exercices précédents, qu'il y a 4 formes indéterminées (F. I.), symbolisées par : " $\infty - \infty$ " ; " $\mathbf{0} \times \infty$ " ; " $\dfrac{\infty}{\infty}$ " et " $\dfrac{\mathbf{0}}{\mathbf{0}}$ ".

Cela signifie que, **lorsqu'on n'est pas dans l'une de ces situations,** on peut déterminer la limite en faisant preuve de bon sens et d'intuition (voire d'utilisation de la calculatrice ...).

Dans les tableaux suivants (qui n sont pas à retenir par cœur mais qu'il faut savoir retrouver) :

* f et g sont deux fonctions définies sur un ensemble D	* a désigne un réel ou $+\infty$ ou $-\infty$,	* ℓ et ℓ' désignent des réels.

Compléter ces tableaux :

Propriétés 1

$\lim\limits_{x \to a} f(x)$	ℓ	ℓ	ℓ	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim\limits_{x \to a} g(x)$	ℓ'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{x \to a} f(x)+g(x)$	$\ell+\ell'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	**F. I.**

$\lim\limits_{x \to a} f(x)$	ℓ	ℓ	ℓ	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{x \to a} g(x)$	ℓ'	$+\infty$	$-\infty$	ℓ'	$+\infty$	$-\infty$	ℓ'	$+\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{x \to a} f(x)-g(x)$	$\ell-\ell'$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	**F. I.**	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	**F. I.**

$\lim\limits_{x \to a} f(x)$	ℓ	$\ell>0$	$\ell>0$	$\ell<0$	$\ell<0$	0	0	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim\limits_{x \to a} g(x)$	ℓ'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{x \to a} f(x)\times g(x)$	$\ell\times\ell'$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	**F.I.**	**F.I.**	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$

$\lim\limits_{x \to a} f(x)$	ℓ	ℓ	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$ ou $-\infty$	$\ell>0$ ou $+\infty$	$\ell>0$ ou $+\infty$	$\ell<0$ ou $-\infty$	$\ell<0$ ou $-\infty$	0
$\lim\limits_{x \to a} g(x)$	$\ell'\neq 0$	$+\infty$ ou $-\infty$	$\ell'>0$	$\ell'<0$	$\ell'>0$	$\ell'<0$	$+\infty$ ou $-\infty$	0 (en restant positif)	0 (en restant négatif)	0 (en restant positif)	0 (en restant négatif)	0
$\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)}$	$\dfrac{\ell}{\ell'}$	0	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	**F. I.**	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	**F. I.**

Exercice 11

Partie A

1) • $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{3}{x} = 0$; $\lim\limits_{x \to -\infty} x = -\infty$ } Par soustraction $\boxed{\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty}$

• $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{3}{x} = 0$; $\lim\limits_{x \to +\infty} x = +\infty$ } Par soustraction $\boxed{\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty}$

• $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \frac{3}{x} = +\infty$; $\lim\limits_{x \to 0} x = 0$ } Par soustraction $\boxed{\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} f(x) = +\infty}$

• $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} \frac{3}{x} = -\infty$; $\lim\limits_{x \to 0} x = 0$ } Par soustraction $\boxed{\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} f(x) = -\infty}$

2) La droite d'équation $x=0$ est asymptote verticale à C_f.

Partie B

3) • $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} x^3 = +\infty$.

• $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} x^3 = -\infty$

$\boxed{\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty \quad \lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = -\infty}$

4) $g(x) = x^3 - 12x$

Donc $g'(x) = 3x^2 - 12$

14/20

$\Delta = 0^2 - 4 \times 3 \times (-12) = 144$

$x_1 = \dfrac{0+12}{6} = 2$ $\qquad x_2 = \dfrac{0-12}{6} = -2$

x	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
Signe de $g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
Variation de g	$-\infty$	$\nearrow$	16	$\searrow$	-16	$\nearrow$	$+\infty$

Partie C

5 a) $\lim\limits_{x \to 1} 2x+3 = 2\times 1+3 = 5$

$\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x<1}} x-1 = 0^-$

Par quotient $\boxed{\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x<1}} h(x) = -\infty}$

b) $\lim\limits_{x \to 1} 2x+3 = 5$

$\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x>1}} x-1 = 0^+$

Par quotient $\boxed{\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x>1}} h(x) = +\infty}$

c) La droite d'équation $x=1$ est une asymptote verticale à C_h

6) a) $\lim\limits_{x \to +\infty} h(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2x}{x} = 2$ $\qquad \boxed{\lim\limits_{x \to +\infty} h(x) = 2}$

$\frac{15}{20}$

. De même $\boxed{\lim_{x \to -\infty} h(x) = 2}$

5) Le droite d'équation $y = 2$ est asymptote horizontale à $\mathcal{C}_h$ au voisinage de $+\infty$ et de $-\infty$

7) $h(x) = \dfrac{2x+3}{x-1}$ donc $h'(x) = \dfrac{2(x-1) - 1(2x+3)}{(x-1)^2}$

$$h'(x) = \frac{2x-2-2x-3}{(x-1)^2} = \frac{-5}{(x-1)^2}$$

$\boxed{h'(x) = \dfrac{-5}{(x-1)^2} \qquad h'(x) < 0 \text{ pour tout } x \neq 1}$

8)

x	$-\infty$	1	$+\infty$
Signe de $h'(x)$	$-$	‖	$-$ .....
Variations de h	2 ↘ $-\infty$	‖	$+\infty$ ↘ 2

16/20

Exercice 12.

1. Rappeler chacune des limites suivantes : ***a.*** $\lim_{x \to -\infty} e^x = 0$ | ***b.*** $\lim_{x \to +\infty} e^x = +\infty$

2. Pour chacune des limites ci-dessous :

* si c'est possible, déterminer la limite en utilisant des opérations élémentaires,
* s'il s'agir d'une F. I., indiquer de quel type.

$\lim_{x \to -\infty} x e^x$ FI "$\infty \times 0$"	$\lim_{x \to +\infty} x e^x = +\infty$	$\lim_{x \to -\infty} \frac{e^x}{x} = 0$	$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x}$ FI "$\frac{\infty}{\infty}$"	$\lim_{x \to +\infty} \frac{x}{e^x}$ FI "$\frac{\infty}{\infty}$"

3. On admettra la "règle" suivante : <u>en cas de forme indéterminée **e^x l'emporte sur x**</u> .

En tenant compte de cette "règle", compléter les propriétés suivantes :

Propriétés 2

$\lim_{x \to -\infty} x e^x = 0$	$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$	$\lim_{x \to +\infty} \frac{x}{e^x} = 0$

4. On admet que ces propriétés se généralisent à n'importe quelle puissance de x. Compléter alors :

Propriétés 3

$\lim_{x \to -\infty} x^n e^x = 0$	$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty$	$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^n}{e^x} = 0$

Remarque : Pour retrouver les résultats de la propriété 3, on retiendra qu'<u>en cas de forme indéterminée,</u>
<u>**e^x l'emporte sur x^n**</u>

17/20

Exercice 13

1) $f_1(x) = 5x - 4e^x + 7$

$$f_1(x) = e^x\left(\frac{5x}{e^x} - 4 + \frac{7}{e^x}\right)$$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x}{e^x} = 0$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{5x}{e^x} - 4 + \frac{7}{e^x} = -4$

$\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$

Par produit,

$$\boxed{\lim_{x \to +\infty} f_1(x) = -\infty}$$

2) $f_2(x) = \dfrac{e^x + 2x + 1}{3x^5 + 2} = \dfrac{e^x\left(1 + \frac{2x}{e^x} + \frac{1}{e^x}\right)}{x^5\left(3 + \frac{2}{x^5}\right)}$

$$f_2(x) = \frac{e^x}{x^5} \times \frac{1 + \frac{2x}{e^x} + \frac{1}{e^x}}{3 + \frac{2}{x^5}}$$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x}{e^x} = 0$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} 1 + \frac{2x}{e^x} + \frac{1}{e^x} = 1$ (1)

$\lim\limits_{x \to +\infty} 3 + \frac{2}{x^5} = 3$ (3)

(1) et (3) donnent (par quotient)

- $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1 + \frac{2x}{e^x} + \frac{1}{e^x}}{3 + \frac{2}{x^5}} = \dfrac{1}{3}$

- $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x^5} = +\infty$ (propriété 3)

Donc par produit

$$\boxed{\lim_{x \to +\infty} f_2(x) = +\infty}$$

Exercice 14

1) a) $\lim\limits_{x \to +\infty} 4-3e^{x} = -\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} e^{x}+2 = +\infty$

$\boxed{\text{Par quotient, on obtient une F.I. du type "}\infty - \infty\text{"}}$

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{-3e^{x}}{e^{x}} = \lim\limits_{x \to +\infty} -3 = -3$

$\boxed{\text{Donc } \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -3}$

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -3$ donc la droite d'équation $y=-3$ est une asymptote horizontale à C_f en $+\infty$.

Remarque

Si l'on veut être plus rigoureuse pour la question 1b) on peut justifier par :

$$f(x) = \frac{4-3e^{x}}{e^{x}+2} = \frac{e^{x}\left(\frac{4}{e^{x}}-3\right)}{e^{x}\left(1+\frac{2}{e^{x}}\right)} = \frac{-3+\frac{4}{e^{x}}}{1+\frac{2}{e^{x}}}$$

Comme $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{x} = +\infty$, on a $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{4}{e^{x}} = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2}{e^{x}} = 0$

$\lim\limits_{x \to +\infty} -3+\dfrac{4}{e^{x}} = -3$

$\lim\limits_{x \to +\infty} 1+\dfrac{2}{e^{x}} = 1$

Donc par quotient

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\dfrac{3}{1} = -3$

13/20

2) On doit démontrer que $\lim_{x \to -\infty} f(x) = 2$

$\lim_{x \to -\infty} e^x = 0$ donc

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{x \to -\infty} 4 - 3e^x = 4 \\ \lim_{x \to -\infty} e^x + 2 = 2 \end{array}\right\}$$

$\boxed{\text{Par quotient } \lim_{x \to -\infty} f(x) = 2}$

3) a) $f(x) = \dfrac{4-3e^x}{e^x+2}$

donc $f'(x) = \dfrac{-3e^x(e^x+2) - e^x(4-3e^x)}{(e^x+2)^2}$

$f'(x) = \dfrac{-3(e^x)^2 - 6e^x - 4e^x + 3(e^x)^2}{(e^x+2)^2} = \dfrac{-10e^x}{(e^x+2)^2}$

$\boxed{\text{Donc } f'(x) = \dfrac{-10e^x}{(e^x+2)^2}}$

b)

x	$-\infty$		$+\infty$
Signe de $-10e^x$		$-$	
Signe de $(e^x+2)^2$		$+$	
Signe de $f'(x)$		$-$	
Variation de f	2	$\searrow$	-3

20/20

4) Pour un peu plus de précision, on peut calculer $f(0)$

$$f(0) = \frac{4-3e^0}{e^0+2} = \frac{1}{3}$$

Donc $A\left(0;\frac{1}{3}\right) \in \mathcal{C}_f$.