

**Objectif n° 1 : Limite d'une fonction en  $+\infty$  et en  $-\infty$**

La notion de limite d'une fonction va généraliser la notion de limite d'une suite vue dans le chapitre 2.

**Exercice 1 :**

**Partie A :** on considère la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = x^2$ .

1. a. Compléter le tableau suivant :

$x$	0	1	5	10	100	1 000	$10^5$	$10^{10}$
$f(x)$								

b. Proposer une valeur de  $x$  pour laquelle  $f(x) > 10^{100}$

c. Proposer une valeur de  $x$  pour laquelle  $f(x) > 10^{1000}$

Il semble donc que, lorsque  $x$  "devient très grand" ( c'est-à-dire lorsque  $x$  tend vers ..... ) alors  $f(x)$  devient aussi grand que l'on veut. On peut donc écrire :  $\lim_{x \rightarrow \dots} f(x) = \dots$

2. Compléter le tableau suivant :

$x$	0	-1	-5	-10	-1 000	$-10^5$	$-10^{10}$	$-10^{50}$
$f(x)$								

Il semble donc que, lorsque  $x$  tend vers ..... alors  $f(x)$  tend vers ..... On peut donc écrire :  $\lim_{x \rightarrow \dots} f(x) = \dots$

**Partie B :** on considère les fonctions  $g$ ,  $h$  et  $i$  définies par  $g(x) = x^3$ ,  $h(x) = e^x$  et  $i(x) = \sqrt{x}$ .

3. a. En utilisant des tableaux de valeurs de la calculatrice, compléter :

$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \dots$	$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \dots$
$\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = \dots$	$\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) = \dots$
$\lim_{x \rightarrow +\infty} i(x) = \dots$	

b. Pourquoi serait-il incohérent de chercher  $\lim_{x \rightarrow -\infty} i(x)$  ?

**Exercice 2 :**

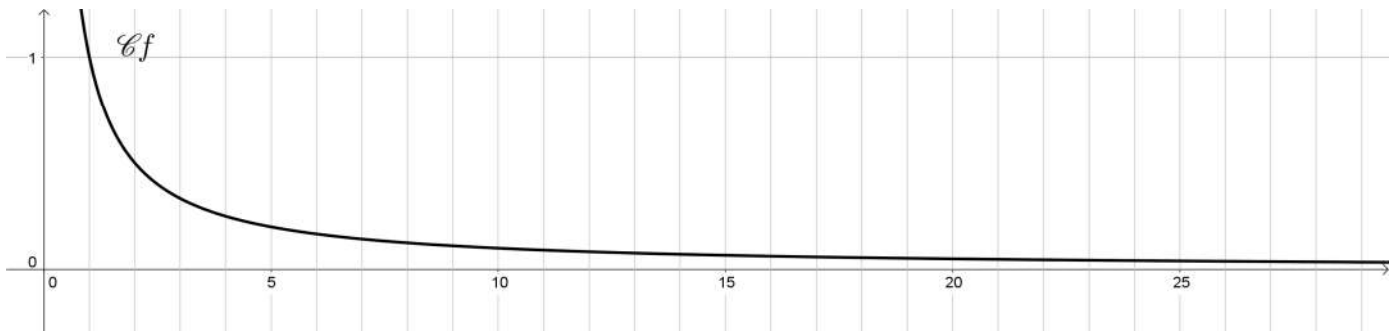
On considère la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R} - \{0\}$  par  $f(x) = \frac{1}{x}$ . On note  $\mathcal{C}_f$  sa courbe représentative

1. a. Compléter le tableau suivant :

$x$	1	4	8	10	100	1 000	100 000
$f(x)$							

Il semble donc que, lorsque  $x$  "devient très grand" ( c'est-à-dire lorsque  $x$  tend vers ..... ) alors  $f(x)$  devient aussi proche de ..... que l'on veut. On peut donc écrire :  $\lim_{x \rightarrow \dots} f(x) = \dots$

b. Observons  $\mathcal{E}f$  pour  $x > 0$



On observe que lorsque  $x$  "devient très grand",  $\mathcal{E}f$  "s'approche aussi près que l'on veut" de l'axe des abscisses ( c'est-à-dire de la droite d'équation  $y = 0$  ).

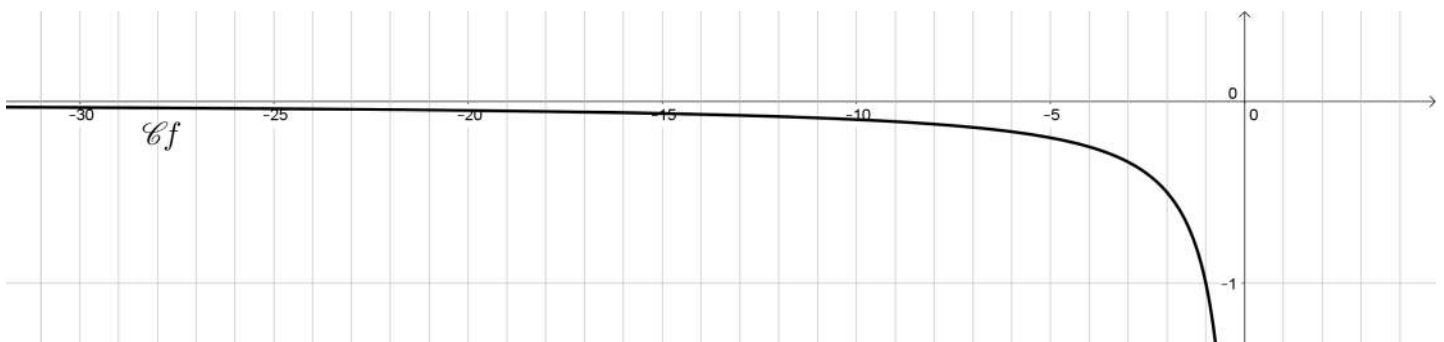
On dit que l'axe des abscisses est une **asymptote horizontale** à  $\mathcal{E}f$  au voisinage de  $+\infty$  ( ou « en  $+\infty$  » ).

2. a. Compléter le tableau suivant :

$x$	-1	-4	-8	-10	-100	-1 000	-100 000
$f(x)$							

A la lecture de ce tableau, on peut écrire :  $\lim_{x \rightarrow \dots} f(x) = \dots\dots\dots$

b. Observons  $\mathcal{E}f$  pour  $x < 0$



Compléter : ..... est une ..... à  $\mathcal{E}f$  au voisinage de .....

Les deux exercices précédents permettent d'obtenir les résultats suivants :

**Propriétés 1 : limites en l'infini des fonctions de référence**

* $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = \dots\dots$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 = \dots\dots$	* $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 = \dots\dots$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 = \dots\dots$
* $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = \dots\dots$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = \dots\dots$	* $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} = \dots\dots$
* $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = \dots\dots$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = \dots\dots$	

Remarque : on a aussi de façon évidente :

\* Si  $k$  désigne un réel strictement positif :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} kx = \dots\dots$  et  $\lim_{x \rightarrow -\infty} kx = \dots\dots$

\* Si  $k$  désigne un réel strictement négatif :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} kx = \dots\dots$  et  $\lim_{x \rightarrow -\infty} kx = \dots\dots$

**Définitions 2**

Soit  $f$  une fonction,  $\mathcal{C}_f$  sa courbe représentative et soit  $l$  un réel quelconque

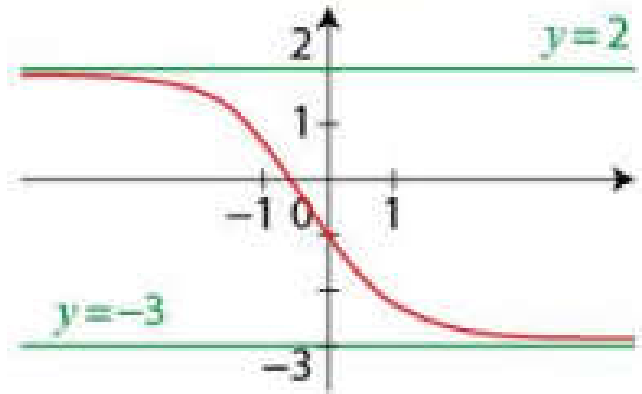
- \* Si  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l$  alors la droite d'équation  $y = l$  est **une asymptote horizontale** à  $\mathcal{C}_f$  au voisinage de  $+\infty$  ( ou encore « la droite d'équation  $y = l$  est **une asymptote horizontale** à  $\mathcal{C}_f$  en  $+\infty$  » ).
- \* Si  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = l$  alors la droite d'équation  $y = l$  est **une asymptote horizontale** à  $\mathcal{C}_f$  au voisinage de  $-\infty$  ( ou encore « la droite d'équation  $y = l$  est **une asymptote horizontale** à  $\mathcal{C}_f$  en  $-\infty$  » ).

**Exercice 3 :**

**Partie A :**

Voici la courbe représentative d'une fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$ . Cette courbe admet pour asymptôtes horizontales les droites d'équation  $y = 2$  au voisinage de  $-\infty$  et  $y = -3$  au voisinage de  $+\infty$ .

1. Traduire ces informations à l'aide de limites.
2. Dresser le tableau de variations de  $f$  en faisant figurer ses limites.



**Partie B :**

Voici le tableau de variations d'une fonction  $g$  définie sur  $\mathbb{R}$ . On note  $\mathcal{C}_g$  sa représentation graphique.

3. Préciser les limites de  $g$  indiquées dans ce tableau.
4. Quelle conséquence graphique peut-on en déduire pour  $\mathcal{C}_g$  ?
5. Tracer, à main levée, une courbe possible pour  $\mathcal{C}_g$ .

$x$	$-\infty$	$+\infty$
Variations de $g$	$-2$	$+\infty$

(An arrow points from the  $-2$  row to the  $+\infty$  column.)

**Partie C :**

Voici le tableau de variations d'une fonction  $h$  définie sur  $\mathbb{R}$ . On note  $\mathcal{C}_h$  sa représentation graphique.

6. Préciser les limites de  $h$  indiquées dans ce tableau.
7. Quelle(s) conséquence(s) graphique(s) peut-on en déduire pour  $\mathcal{C}_h$  ?
8. Tracer, à main levée, une courbe possible pour  $\mathcal{C}_h$ .

$x$	$-\infty$	$2$	$+\infty$
Variations de $h$	$2$	$-3$	$1$

(Two arrows point from the  $2$  row to the  $-3$  and  $1$  columns.)

**Objectif n° 2 : Limite d'une fonction en un réel**

**Exercice 4 :**

**Partie A :** on considère la fonction  $f$  définie par  $f(x) = \frac{1}{x^2}$

On note  $\mathcal{C}_f$  sa courbe représentative

1. Expliquer pourquoi 0 n'a pas d'image par  $f$ .
2. On va chercher à savoir "ce qu'il se passe" pour  $f(x)$  lorsque  $x$  va se rapprocher de 0.

a. Compléter les tableaux suivants :

$x$	2	1	0,5	0,1	0,001	$10^{-4}$	$10^{-10}$
$f(x)$							

$x$	-2	-1	-0,5	-0,1	-0,001	$-10^{-4}$	$-10^{-10}$
$f(x)$							

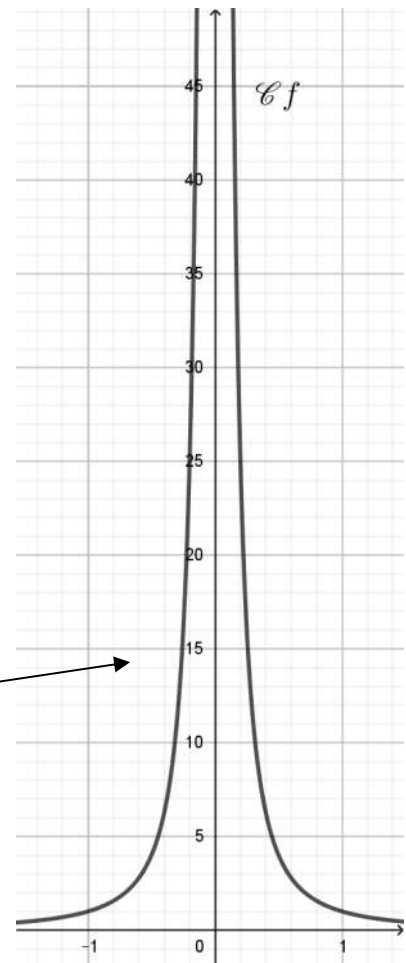
Il semble donc que, lorsque  $x$  "tend vers 0", alors  $f(x)$  tend vers .....

On peut donc écrire :  $\lim_{x \rightarrow \dots} f(x) = \dots$

b. Interprétation graphique : observons la courbe de « au voisinage de 0 ».

On observe que lorsque  $x$  "devient très proche de 0",  $\mathcal{C}_f$  "s'approche aussi près qu'on veut" de l'axe des ordonnées ( c'est-à-dire de la droite d'équation  $x = 0$  ).

On dit que l'axe des ordonnées est une asymptote verticale à  $\mathcal{C}_f$ .



**Partie B** : on considère la fonction  $g$  définie par  $g(x) = \frac{1}{x}$ . On note  $\mathcal{C}_g$  sa courbe représentative

Comme pour la fonction  $f$  de la partie A, 0 n'a pas d'image par  $g$ .

3. Compléter :

a.

$x$	2	1	0,1	0,01	$10^{-10}$
$g(x)$					

Lorsque  $x$  tend vers 0 en restant positif, alors  $g(x)$  tend vers .....

On écrit alors :

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} g(x) = \dots\dots\dots \text{ ou encore } \lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = \dots\dots\dots$$

b.

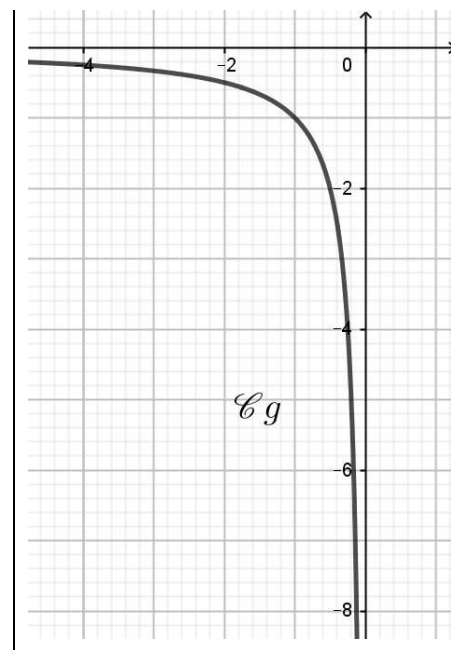
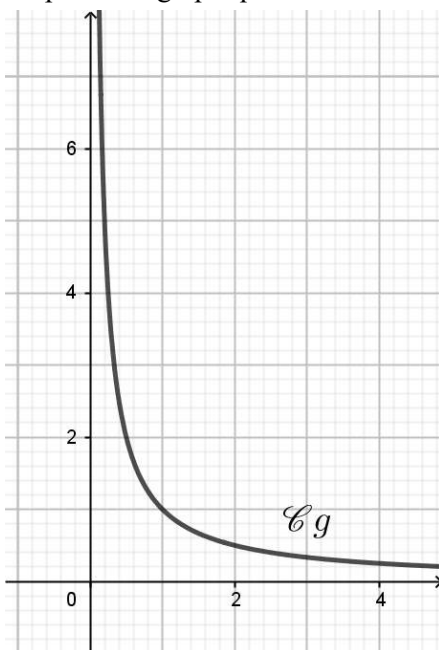
$x$	-2	-1	-0,1	-0,01	$-10^{-10}$
$g(x)$					

Lorsque  $x$  tend vers 0 en restant négatif, alors  $g(x)$  tend vers .....

On écrit alors :

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} g(x) = \dots\dots\dots \text{ ou encore } \lim_{x \rightarrow 0^-} g(x) = \dots\dots\dots$$

4. Interprétation graphique :



On constate que l'axe des abscisses est asymptôte verticale à la courbe de  $g$ .

L'exercice précédent permet d'obtenir les résultats suivants :

**Propriétés 3 : fonction de référence de limites infinies en un réel**

$$* \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = \dots\dots\dots$$

$$* \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = \dots\dots\dots$$

$$* \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = \dots\dots\dots$$



**Objectif n° 3 : Opérations sur les limites – Découvrir les formes indéterminées**

**Exercice 6 :**

**Partie A :**

1. Soient  $f$  et  $g$  les deux fonctions définies par  $f(x) = x^2 + 3x + 5$  et  $g(x) = x^2 - 1$

- a. Déterminer la limite en  $+\infty$  de  $f(x)$  puis celle de  $g(x)$
- b. Exprimer  $f(x) - g(x)$  sous forme réduite et en déduire la limite de  $f(x) - g(x)$  en  $+\infty$ .
- c. Reporter les résultats dans le tableau ci-dessous :

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \dots\dots\dots$	$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \dots\dots\dots$	$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - g(x) = \dots\dots\dots$
---	---	--

2. Soient  $f$  et  $g$  les deux fonctions définies par  $f(x) = \sqrt{x} + 2$  et  $g(x) = \sqrt{x} + x$

- a. Déterminer la limite en  $+\infty$  de  $f(x)$  puis celle de  $g(x)$
- b. Exprimer  $f(x) - g(x)$  sous forme réduite et en déduire la limite de  $f(x) - g(x)$  en  $+\infty$ .
- c. Reporter les résultats dans le tableau ci-dessous :

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \dots\dots\dots$	$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \dots\dots\dots$	$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - g(x) = \dots\dots\dots$
---	---	--

3. Soient  $f$  et  $g$  les deux fonctions définies par  $f(x) = 2x^3 - 4$  et  $g(x) = 2x^3 + 1$

- a. Déterminer la limite en  $+\infty$  de  $f(x)$  puis celle de  $g(x)$
- b. Exprimer  $f(x) - g(x)$  sous forme réduite et en déduire la limite de  $f(x) - g(x)$  en  $+\infty$ .
- c. Reporter les résultats dans le tableau ci-dessous :

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \dots\dots\dots$	$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \dots\dots\dots$	$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - g(x) = \dots\dots\dots$
---	---	--

On constate dans cette partie que lorsque  $f$  et  $g$  sont deux fonctions qui tendent toutes les deux vers  $+\infty$ , la différence  $f(x) - g(x)$  peut tendre vers  $+\infty$  ( question 1 ), vers  $-\infty$  ( question 2 ) ou vers un réel non nul ( question 3 ). Cela signifie que lorsque deux fonctions  $f$  et  $g$  tendent vers  $+\infty$ , on n'a pas de résultat général concernant la limite de leur différence; on dit alors qu'il s'agit d'une **forme indéterminée ( ici du type "  $\infty - \infty$  " )** et il faut dans ce cas transformer l'expression de  $f(x) - g(x)$  pour "**lever l'indétermination**" et trouver la limite.

**Partie B :**

4. Soit  $f$  la fonction définie par  $f(x) = 3x^3 - 4x^2$

- a. Expliquer pourquoi on est en présence d'une forme indéterminée au voisinage de  $+\infty$ .
- b. Pour lever l'indétermination, on peut mettre en facteur le "terme de plus haut degré" de  $f$ , c'est-à-dire  $x^3$ .

Recopier et compléter :  $f(x) = x^3 ( \frac{3x^3}{x^3} - \dots\dots ) = x^3 ( 3 - \dots\dots )$ .

- c. Or  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 = \dots\dots\dots$   
 et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} ( 3 - \frac{4}{x} ) = \dots\dots\dots$  } Donc par produit  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 ( 3 - \frac{4}{x} ) = \dots\dots\dots$

On a déterminé que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \dots\dots\dots$  On a ainsi "**levé l'indétermination**".

5. En utilisant la même méthode que dans la question 4, déterminer les limites suivantes :

a. $g(x) = -2x^3 + 3x^2 - 1$ au voisinage de $+\infty$ puis de $-\infty$	b. $h(x) = x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$ au voisinage de $+\infty$ puis de $-\infty$
---	--

L'exercice précédent met en évidence la propriété suivante :

**Propriété 5**

Soit  $f$  une fonction polynôme ( c'est-à-dire telle que  $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$  ).

Alors  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} a_n x^n$  et  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} a_n x^n$

6. Déterminer les limites en  $-\infty$  des fonctions suivantes :

a. $f_1(x) = -3x^5 + 4x^2 - 5$	b. $f_2(x) = x^7 + 3x^6 - x^4 + 1$	c. $f_3(x) = 4x^2 - 5x - 7$	d. $f_4(x) = -x^3 - 2x^4 + x + 1$
--------------------------------	------------------------------------	-----------------------------	-----------------------------------

**Exercice 7 :**

**Partie A :**

1. Soient  $f$  et  $g$  les deux fonctions définies par  $f(x) = 3x^2$  et  $g(x) = \frac{5}{x}$

- a. Déterminer la limite en  $+\infty$  de  $f(x)$  puis celle de  $g(x)$
- b. Exprimer  $f(x) \times g(x)$  sous forme réduite et en déduire la limite de  $f(x) \times g(x)$  en  $+\infty$ .
- c. Reporter les résultats dans le tableau ci-dessous :

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \dots\dots\dots$	$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \dots\dots\dots$	$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \times g(x) = \dots\dots\dots$
---	---	---

2. Soient  $f$  et  $g$  les deux fonctions définies par  $f(x) = 2x$  et  $g(x) = \frac{7}{x^2}$

- a. Déterminer la limite en  $+\infty$  de  $f(x)$  puis celle de  $g(x)$
- b. Exprimer  $f(x) \times g(x)$  sous forme réduite et en déduire la limite de  $f(x) \times g(x)$  en  $+\infty$ .
- c. Reporter les résultats dans le tableau ci-dessous :

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \dots\dots\dots$	$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \dots\dots\dots$	$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \times g(x) = \dots\dots\dots$
---	---	---

3. Soient  $f$  et  $g$  les deux fonctions définies par  $f(x) = 6x$  et  $g(x) = \frac{1}{2x}$

- a. Déterminer la limite en  $+\infty$  de  $f(x)$  puis celle de  $g(x)$
- b. Exprimer  $f(x) \times g(x)$  sous forme réduite et en déduire la limite de  $f(x) \times g(x)$  en  $+\infty$ .
- c. Reporter les résultats dans le tableau ci-dessous :

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \dots\dots\dots$	$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \dots\dots\dots$	$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \times g(x) = \dots\dots\dots$
---	---	---

On constate dans cette partie que lorsque  $f$  est une fonction qui tend vers  $+\infty$  et que  $g$  est une fonction qui tend vers 0, le produit  $f(x) \times g(x)$  peut tendre vers  $+\infty$  ( question 1 ), vers 0 ( question 2 ) ou vers un réel non nul ( question 3 ). Cela signifie que la forme " **$\infty \times 0$** " est une forme indéterminée et il faut dans ce cas transformer l'expression de  $f(x) \times g(x)$  pour "**lever l'indétermination**" et trouver la limite.

**Partie B :**

4. Soit  $f$  la fonction définie par  $f(x) = \frac{5}{2x} (6x^3 + 4)$

- a. Expliquer pourquoi on est en présence d'une forme indéterminée au voisinage de  $+\infty$ .
- b. Développer et simplifier  $f(x)$  et en déduire la limite de  $f$  en  $+\infty$ .

**Exercice 8 :**

**Partie A :**

1. Soient  $f$  et  $g$  les deux fonctions définies par  $f(x) = 3x^2$  et  $g(x) = 2x$

- a. Déterminer la limite en  $+\infty$  de  $f(x)$  puis celle de  $g(x)$
- b. Exprimer  $\frac{f(x)}{g(x)}$  sous forme réduite et en déduire la limite de  $\frac{f(x)}{g(x)}$  en  $+\infty$ .
- c. Reporter les résultats dans le tableau ci-dessous :

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \dots\dots\dots$	$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \dots\dots\dots$	$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \dots\dots\dots$
---	---	--

2. Soient  $f$  et  $g$  les deux fonctions définies par  $f(x) = 6x$  et  $g(x) = 3x^3$

- a. Déterminer la limite en  $+\infty$  de  $f(x)$  puis celle de  $g(x)$
- b. Exprimer  $\frac{f(x)}{g(x)}$  sous forme réduite et en déduire la limite de  $\frac{f(x)}{g(x)}$  en  $+\infty$ .
- c. Reporter les résultats dans le tableau ci-dessous :

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \dots\dots\dots$	$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \dots\dots\dots$	$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \dots\dots\dots$
---	---	--

3. Soient  $f$  et  $g$  les deux fonctions définies par  $f(x) = 10x^3$  et  $g(x) = 2x^3$

- a. Déterminer la limite en  $+\infty$  de  $f(x)$  puis celle de  $g(x)$
- b. Exprimer  $\frac{f(x)}{g(x)}$  sous forme réduite et en déduire la limite de  $\frac{f(x)}{g(x)}$  en  $+\infty$ .
- c. Reporter les résultats dans le tableau ci-dessous :

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \dots\dots\dots$	$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \dots\dots\dots$	$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \dots\dots\dots$
---	---	--

On constate dans cette partie que lorsque  $f$  et  $g$  sont deux fonctions qui tendent toutes les deux vers  $+\infty$ , le quotient  $\frac{f(x)}{g(x)}$  peut tendre vers  $+\infty$  ( question 1 ), vers 0 ( question 2 ) ou vers un réel non nul ( question 3 ). Cela signifie que la forme " $\frac{\infty}{\infty}$ " **est une forme indéterminée** et il faut dans ce cas transformer l'expression de  $\frac{f(x)}{g(x)}$  pour "**lever l'indétermination**" et trouver la limite.

**Partie B :**

4. Soit  $f$  la fonction définie par  $f(x) = \frac{4x - 1}{2x + 3}$

- a. Expliquer pourquoi on est en présence d'une forme indéterminée au voisinage de  $+\infty$ .
- b. Au numérateur et au dénominateur, mettez en facteur le "terme de plus haut degré" puis simplifiez l'expression de  $f(x)$ .
- c. En déduire la limite de  $f$  au voisinage de  $+\infty$

5. En utilisant la même méthode que dans la question 4, déterminer les limites suivantes :

<p>a. <math>g(x) = \frac{x^3 - 1}{2x^2 + 1}</math> au voisinage de <math>+\infty</math> puis de <math>-\infty</math></p>	<p>b. <math>h(x) = \frac{3x^3 + 5x + 1}{5x^4 + 7}</math> au voisinage de <math>+\infty</math> puis de <math>-\infty</math></p>
--	--

L'exercice précédent met en évidence la propriété suivante :

**Propriété 6**

Soit  $f$  une fonction rationnelle ( c'est-à-dire telle que  $f(x) = \frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0}{b_p x^p + b_{p-1} x^{p-1} + \dots + b_1 x + b_0}$  ).

Alors  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{a_n x^n}{b_p x^p}$  et  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{a_n x^n}{b_p x^p}$

6. Déterminer les limites en  $+\infty$  des fonctions suivantes :

<p>a. <math>f_1(x) = \frac{-3x^5 + 4}{x^2 - 5}</math></p>	<p>b. <math>f_2(x) = \frac{x^4 + 1}{x^7 + 3x^6}</math></p>	<p>c. <math>f_3(x) = \frac{4x^2}{5x - 7}</math></p>	<p>d. <math>f_4(x) = \frac{-2x^4 + x + 1}{3x^4 - 10x^2 - 7}</math></p>
---	--	---	--

**Exercice 9 :**

1. Soient  $f$  et  $g$  les deux fonctions définies par  $f(x) = \frac{4}{x}$  et  $g(x) = \frac{2}{x}$

- a. Déterminer la limite en  $+\infty$  de  $f(x)$  puis celle de  $g(x)$
- b. Exprimer  $\frac{f(x)}{g(x)}$  sous forme réduite et en déduire la limite de  $\frac{f(x)}{g(x)}$  en  $+\infty$ .
- c. Reporter les résultats dans le tableau ci-dessous :

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \dots\dots\dots$	$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \dots\dots\dots$	$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \dots\dots\dots$
---	---	--

2. Soient  $f$  et  $g$  les deux fonctions définies par  $f(x) = \frac{4}{x}$  et  $g(x) = \frac{3}{x^2}$

- a. Déterminer la limite en  $+\infty$  de  $f(x)$  puis celle de  $g(x)$
- b. Exprimer  $\frac{f(x)}{g(x)}$  sous forme réduite et en déduire la limite de  $\frac{f(x)}{g(x)}$  en  $+\infty$ .
- c. Reporter les résultats dans le tableau ci-dessous :

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \dots\dots\dots$	$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \dots\dots\dots$	$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \dots\dots\dots$
---	---	--

3. Soient  $f$  et  $g$  les deux fonctions définies par  $f(x) = \frac{4}{x^3}$  et  $g(x) = \frac{5}{x}$

a. Déterminer la limite en  $+\infty$  de  $f(x)$  puis celle de  $g(x)$

b. Exprimer  $f(x) \times g(x)$  sous forme réduite et en déduire la limite de  $\frac{f(x)}{g(x)}$  en  $+\infty$ .

c. Reporter les résultats dans le tableau ci-dessous :

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \dots\dots\dots$	$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \dots\dots\dots$	$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \dots\dots\dots$
---	---	--

On constate dans ces trois questions que lorsque  $f$  et  $g$  sont deux fonctions qui tendent toutes les deux vers 0, le quotient  $\frac{f(x)}{g(x)}$  peut tendre vers un réel non nul ( question 1 ), vers  $+\infty$  ( question 2 ) ou vers 0 ( question 3 ).

Cela signifie que la forme " $\frac{0}{0}$ " est une forme indéterminée et il faut dans ce cas transformer l'expression de  $\frac{f(x)}{g(x)}$  pour " lever l'indétermination " et trouver la limite.

**Exercice 10 :**

On a vu, lors des quatre exercices précédents, qu'il y a 4 formes indéterminées ( F. I. ), symbolisées par : " $\infty - \infty$ "; " $0 \times \infty$ "; " $\frac{\infty}{0}$ " et " $\frac{0}{0}$ ".

Cela signifie que, **lorsqu'on n'est pas dans l'une de ces situations**, on peut déterminer la limite en faisant preuve de bon sens et d'intuition ( ou en utilisant la calculatrice ... ).

Dans les tableaux suivants ( qui n sont pas à retenir par cœur mais qu'il faut savoir retrouver ) :

* $f$ et $g$ sont deux fonctions définies sur un ensemble $D$	* $a$ désigne un réel ou $+\infty$ ou $-\infty$ ,	* $l$ et $l'$ désignent des réels.
---	---	------------------------------------

Compléter ces tableaux :

**Propriétés 7**

$\lim_{x \rightarrow a} f(x)$	$l$	$l$	$l$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim_{x \rightarrow a} g(x)$	$l'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim_{x \rightarrow a} f(x) + g(x)$						<b>F. I.</b>

$\lim_{x \rightarrow a} f(x)$	$l$	$l$	$l$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim_{x \rightarrow a} g(x)$	$l'$	$+\infty$	$-\infty$	$l'$	$+\infty$	$-\infty$	$l'$	$+\infty$	$-\infty$
$\lim_{x \rightarrow a} f(x) - g(x)$					<b>F. I.</b>				<b>F. I.</b>

$\lim_{x \rightarrow a} f(x)$	$l$	$l > 0$	$l > 0$	$l < 0$	$l < 0$	0	0	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim_{x \rightarrow a} g(x)$	$l'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim_{x \rightarrow a} f(x) \times g(x)$						<b>F. I.</b>	<b>F. I.</b>			

$\lim_{x \rightarrow a} f(x)$	$l$	$l$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$ ou $-\infty$	$l > 0$ ou $+\infty$	$l > 0$ ou $+\infty$	$l < 0$ ou $-\infty$	$l < 0$ ou $-\infty$	0
$\lim_{x \rightarrow a} g(x)$	$l' \neq 0$	$+\infty$ ou $-\infty$	$l' > 0$	$l' < 0$	$l' > 0$	$l' < 0$	$+\infty$ ou $-\infty$	0 ( en restant positif )	0 ( en restant négatif )	0 ( en restant positif )	0 ( en restant négatif )	0
$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$							<b>F. I.</b>					<b>F. I.</b>

**Exercice 11 :**

**Partie A :** on considère la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R} - \{0\}$  par  $f(x) = \frac{3}{x} - x$  de représentation graphique  $\mathcal{C}_f$ .

1. Déterminer les limites de  $f$  en  $-\infty$ , en  $+\infty$  et en  $0$ .
2. Interpréter graphiquement les résultats obtenus en ce qui concerne  $\mathcal{C}_f$ .

**Partie B :** on considère la fonction  $g$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $g(x) = x^3 - 12x$ .

3. Déterminer alors les limites de  $g$  en  $+\infty$  et en  $-\infty$ .
4. Déterminer  $g'(x)$  et dresser le tableau de variations de  $g$  (on fera figurer les limites dans ce tableau).

**Partie C :** on considère la fonction  $h$  définie sur  $\mathbb{R} - \{1\}$  par  $h(x) = \frac{2x+3}{x-1}$ . On note  $\mathcal{C}_h$  sa représentation graphique.

5. a. Déterminer  $\lim_{x \rightarrow 1} 2x+3$  et  $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} x-1$ . En déduire  $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} h(x)$

b. Déterminer  $\lim_{x \rightarrow 1} 2x+3$  et  $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} x-1$ . En déduire  $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} h(x)$

c. Interpréter graphiquement les résultats ci-dessus.

6. a. Déterminer alors les limites de  $h$  en  $+\infty$  et en  $-\infty$ .

b. Interpréter graphiquement les résultats ci-dessus.

7. Justifier que pour tout  $x$  de  $\mathbb{R} - \{1\}$  :  $h'(x) = \frac{-5}{(x-1)^2}$

8. Compléter alors le tableau ci-contre :

$x$	$-\infty$	$1$	$+\infty$
Signe de $h'(x)$	.....		.....
Variations de $h$			

**Exercice 12 :**

1. Rappeler chacune des limites suivantes : a.  $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = \dots\dots\dots$  | b.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = \dots\dots\dots$

2. Pour chacune des limites ci-dessous :
  - \* si c'est possible, déterminer la limite en utilisant des opérations élémentaires,
  - \* s'il s'agit d'une F. I., indiquer de quel type.

$\lim_{x \rightarrow -\infty} x e^x$	$\lim_{x \rightarrow +\infty} x e^x$	$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x}{x}$	$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x}$	$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x}$
--------------------------------------	--------------------------------------	--	--	--

3. On admettra la "règle" suivante : en cas de forme indéterminée  $e^x$  l'emporte sur  $x$  .

En tenant compte de cette "règle", compléter les propriétés suivantes :

**Propriétés 8**

$\lim_{x \rightarrow -\infty} x e^x = \dots\dots\dots$	$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = \dots\dots\dots$	$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x} = \dots\dots\dots$
--	--	--

4. On admet que ces propriétés se généralisent à n'importe quelle puissance de  $x$ . Compléter alors :

**Propriétés 9**

$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^n e^x = \dots\dots\dots$	$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^n} = \dots\dots\dots$	$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^n}{e^x} = \dots\dots\dots$
--	--	--

Remarque : Pour retrouver les résultats de la propriété 9, on retiendra qu'en cas de forme indéterminée,  **$e^x$  l'emporte sur  $x^n$**

**Exercice 13 :**

Déterminer la limite de chacune des fonctions suivantes au voisinage de  $+\infty$  :

1. $f_1(x) = 5x - 4e^x + 7$	2. $f_2(x) = \frac{e^x + 2x + 1}{3x^5 + 2}$
-----------------------------	---

**Exercice 14 :**

Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = \frac{4 - 3e^x}{e^x + 2}$ . On nomme  $\mathcal{C}_f$  sa représentation graphique.

1. a. Expliquer pourquoi on est en présence d'une forme indéterminée au voisinage de  $+\infty$ .  
 b. Justifier que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -3$   
 c. Interpréter graphiquement le résultat précédent.
2. Démontrer que la droite d'équation  $y = 2$  est une asymptote horizontale à  $\mathcal{C}_f$  au voisinage de  $-\infty$ .
3. a. Justifier que, pour tout réel  $x$  :  $f'(x) = \frac{-10e^x}{(e^x + 2)^2}$ .  
 b. Dresser le tableau de variations de  $f$ .
4. En utilisant les résultats obtenus précédemment, tracer, page suivante, la courbe  $\mathcal{C}_f$

