Term - Maths Complémentaires

Limites d'une fonction

I – Limites en $+\infty$ ou en $-\infty$ des fonctions de référence

a. Fonctions de référence

Propriétés 1 : limites en l'infini des fonctions de référence

* Si k désigne un réel <u>strictement positif</u> : $\lim\limits_{x \to +\infty} kx = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} kx = -\infty$	
* Si k désigne un réel <u>strictement négatif</u> : $\lim\limits_{x \to +\infty} kx = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} kx = +\infty$	
* $\lim\limits_{x \to +\infty} x^2 = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} x^2 = +\infty$	* $\lim\limits_{x \to +\infty} x^3 = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} x^3 = -\infty$
* $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$	* $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x} = +\infty$
* $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{1}{x} = 0$	* $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0$

b. Asymptote horizontale à la courbe représentative d'une fonction

Définitions 2

Soit f une fonction, $\mathscr{C}f$ sa courbe représentative et soit ℓ un réel quelconque

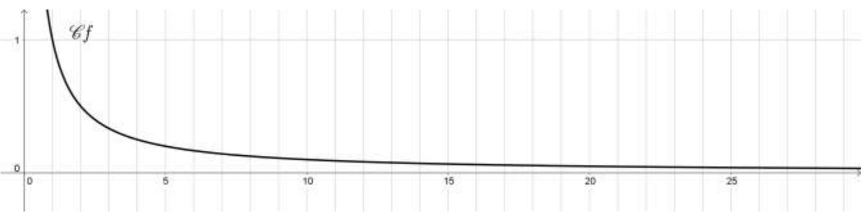
* Si $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \ell$ alors la droite d'équation $y = \ell$ est **une asymptote horizontale** à $\mathscr{C}f$ au voisinage de $+\infty$

(ou encore « la droite d'équation $y = \ell$ est **une asymptote horizontale** à $\mathscr{C}f$ en $+\infty$ »).

* Si $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \ell$ alors la droite d'équation $y = \ell$ est **une asymptote horizontale** à $\mathscr{C}f$ au voisinage de $-\infty$

(ou encore « la droite d'équation $y = \ell$ est **une asymptote horizontale** à $\mathscr{C}f$ en $-\infty$ »).

Ainsi par exemple, comme $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$, la droite d'équation $y = 0$ (c'est-à-dire l'axe des abscisses) est une asymptote horizontale à la courbe représentative de la fonction inverse en $+\infty$ (c'est aussi le cas en $-\infty$) comme on le constate sur la figure ci-contre.



II – Limites en un réel

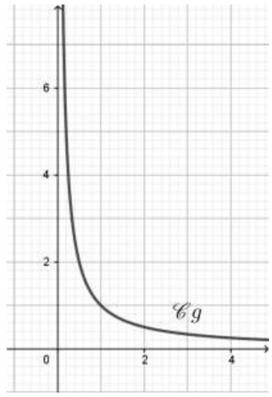
a. Limites en un réel des fonctions de référence

Propriétés 3 : fonction de référence de limites infinies en un réel

* $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$

* $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$

***b.** Asymptote verticale à la courbe représentative d'une fonction*



Définition 4

Soit f une fonction, $\mathscr{C}f$ sa courbe représentative et soit a un réel quelconque

Si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$ ou si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = -\infty$ alors la droite d'équation

$x = a$ est **une asymptote verticale** à $\mathscr{C}f$

Ainsi par exemple, comme $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \dfrac{1}{x} = +\infty$, la droite d'équation $x = 0$ (c'est-à-dire l'axe des ordonnées) est une asymptote verticale à la courbe représentative de la fonction inverse comme on le constate sur la figure ci-dessus.

III – Opérations sur les limites

Propriétés 5 : règles opératoires sur les limites

Dans ce qui suit, f et g désignent des fonctions; ℓ et ℓ' désignent des nombres réels et a désigne soit un réel, soit $+\infty$ soit $-\infty$. On admet les résultats suivants :

➔ **Somme et produit de deux fonctions (règles admises)**

* Somme

Si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \dots$	ℓ	ℓ	ℓ	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$
et $\lim\limits_{x \to a} g(x) = \dots$	ℓ'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
Alors $\lim\limits_{x \to a} [f(x) + g(x)] = \dots$	$\ell + \ell'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	**F. I.**	$-\infty$

* Produit

Si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \dots$	ℓ	$\ell > 0$	$\ell > 0$	$\ell < 0$	$\ell < 0$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	0
et $\lim\limits_{x \to a} g(x) = \dots$	ℓ'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$ ou $-\infty$
Alors $\lim\limits_{x \to a} [f(x) \times g(x)] = \dots$	$\ell \times \ell'$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	**F. I.**

➔ **Quotient de deux fonctions (règles admises)**

* Cas où $\lim\limits_{x \to a} g(x) \neq 0$

Si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \dots$	ℓ	ℓ	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$ ou $-\infty$
et $\lim\limits_{x \to a} g(x) = \dots$	$\ell' \neq 0$	$+\infty$ ou $-\infty$	$\ell' > 0$	$\ell' < 0$	$\ell' > 0$	$\ell' < 0$	$+\infty$ ou $-\infty$
Alors $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dots$	$\dfrac{\ell}{\ell'}$	0	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	**F. I.**

* Cas où $\lim\limits_{x \to a} g(x) = 0$

Si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \dots$	$\ell > 0$ ou $+\infty$	$\ell < 0$ ou $-\infty$	$\ell > 0$ ou $+\infty$	$\ell < 0$ ou $-\infty$	0
et $\lim\limits_{x \to a} g(x) = \dots$	0 en restant positif	0 en restant positif	0 en restant négatif	0 en restant négatif	0
Alors $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dots$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	**F. I.**

Remarques :

* Les résultats ci-dessus ne doivent pas être retenus par cœur, mais vous devez pouvoir les retrouver avec un peu de bon sens (on peut aussi s'aider de la calculatrice).

* Il y a **4 types de F. I.** symbolisées sous la forme : " $\infty - \infty$ " ; " $\mathbf{0} \times \infty$ " ; " $\dfrac{\mathbf{0}}{\mathbf{0}}$ " et " $\dfrac{\infty}{\infty}$ " pour lesquelles on ne peut pas conclure immédiatement; il va falloir lever l'indétermination en modifiant l'écriture de la fonction.

IV – Formes indéterminées avec la fonction exponentielle

On sait que $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$ et que $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$

On en déduit donc que les limites suivantes sont des Formes Indéterminées : $\lim\limits_{x \to -\infty} x\, e^x$; $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x}$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x}{e^x}$

Pour "lever ces indéterminations", on admettra la "règle" suivante :

en cas de forme indéterminée : " e^x l'emporte sur x " et " e^x l'emporte sur x^n "

On a donc les propriétés suivantes

Propriétés 6

$\lim\limits_{x \to -\infty} x\, e^x = 0$	$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$	$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x}{e^x} = 0$
$\lim\limits_{x \to -\infty} x^n\, e^x = 0$	$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x^n} = +\infty$	$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^n}{e^x} = 0$